


МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИЖЕВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Утверждаю:
Проректор по учебной работе
профессор


_____ П.Б. Акмаров
« 13 » 06 _____ 2016 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Учебное пособие для студентов,
обучающихся по направлениям «Агроинженерия»
и «Теплоэнергетика и теплотехника»

Составители:

Ю.А. Боровиков
Н.В. Гусева
А.Г. Иванов
А.В. Костин

Ижевск
ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА
2016

УДК 531.2 (075.8)

ББК 22.21я73

Т 33

Учебное пособие составлено на основе Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования бакалавриата «Агроинженерия» и «Теплоэнергетика и теплотехника».

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА, протокол № 5 от 28.06.2016 г.

Рецензент:

П.Л. Максимов – доктор технических наук, профессор, декан агроинженерного факультета, заведующий кафедрой тракторов, автомобилей и сельскохозяйственных машин ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА

Составители:

Ю.А. Боровиков – кандидат технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА

Н.В. Гусева – старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА

А.Г. Иванов – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА

А.В. Костин – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА

Т 33 **Теоретическая механика: Статика** : учебное пособие / Сост. Ю.А. Боровиков [и др.]. – Ижевск : ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА, 2016. –56 с.

В пособии изложены аксиомы статики, основные понятия о силах взаимодействия тел; дан метод приведения сложных систем сил к простейшему виду, определены условия равновесия тел под действием сил; рассмотрены способы нахождения центров тяжести тел; показаны примеры решения задач статики.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов бакалавриата очной и заочной форм обучения Агроинженерного факультета и факультета энергетика и электрификации при изучении раздела «Статика» курса теоретической механики.

УДК 531.2 (075.8)

ББК 22.21я73

© ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА, 2016
©Боровиков Ю.А., Гусева Н.В.,
Иванов А.Г., Костин А.В.,
составление 2016

О Г Л А В Л Е Н И Е

1	Основные понятия и аксиомы статики.	4
1.1	Закон равенства действия и противодействия (аксиома 1). Вектор силы. Внешние и внутренние силы.	4
1.2	Уравновешенная система сил. Аксиома 2 – о двух уравновешенных силах. Аксиома 3 – об отвердевании нетвердого тела	6
1.3	Эквивалентные системы сил. Равнодействующая. Аксиомы 4 и 5 о преобразовании сил	7
1.4	Связи и реакции связей. Принцип освобождаемости от связей. Примеры связей	10
2	Момент силы. Пара сил	15
2.1	Алгебраический момент силы относительно точки. Теорема Вариньона	15
2.2	Момент силы относительно оси	16
2.3	Момент силы относительно точки как вектор	19
2.4	Зависимость между моментами силы относительно точки и относительно оси, проходящей через эту точку	20
2.5	Система двух параллельных сил. Пара сил	22
2.6	Момент пары сил. Эквивалентные преобразования пар.	24
3	Приведение системы сил к произвольной точке (центру приведения). Уравнения равновесия системы сил.	27
3.1	Главный вектор и главный момент системы сил. Классификация систем сил	27
3.2	Приведение силы к центру (метод Пуансо).	28
3.3	Приведение к центру произвольной плоской системы сил	29
3.4	Приведение произвольной пространственной системы сил	31
3.5	Приведение системы сходящихся сил и системы параллельных сил	32
3.6	Уравнения равновесия систем сил. Статически определенные задачи.	34
3.7	Приведение неуравновешенных систем сил к простейшему виду	36
4	Распределенные силы. Центр тяжести.	39
4.1	Равнодействующая распределенных сил.	39
4.2	Реакция жесткой заделки	42
4.3	Сила тяжести. Центр тяжести	43
4.4	Центр тяжести однородных тел	44
4.5	Способы определения координат центров тяжести тел	45
4.6	Примеры на определение положения центра тяжести	47
	Приложение А. Проекция вектора на ось. Составляющие (компоненты) вектора, параллельные осям	50
	Приложение Б. Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. Определение реакций связей твердого тела	52
	Список рекомендуемой литературы	55

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

Теоретическая механика изучает движение тел и условия их равновесия. В процессе движения и при равновесии материальные тела взаимодействуют между собой. В качестве модели и меры взаимодействия в механике принято понятие вектора силы. В разделе «Статика» курса теоретической механики изучаются правила преобразования векторов сил и определяются условия, при которых тела под действием сил сохраняют равновесие.

Вектор силы – это один из примеров идеализации явлений природы. В механике идеализируют также свойства тел, движение или равновесие которых изучают. Идеализацией являются, например, следующие понятия: абсолютно твердое тело; гибкая нерастяжимая нить; невесомый жесткий стержень. При решении некоторых задач можно пренебречь размерами тела и считать его материальной точкой. С другой стороны тело можно считать состоящим из множества элементарных частиц и рассматривать его как систему материальных точек.

1.1 Закон равенства действия и противодействия (аксиома 1).

Вектор силы. Внешние и внутренние силы

Понятие о взаимодействии тел предполагает, что не существует одностороннего действия. Согласно Ньютону «Действию всегда соответствует равное ему и противоположное противодействие». Сформулируем закон равенства действия и противодействия (аксиома 1) для случая, когда можно пренебречь размерами тел по сравнению с расстоянием между ними: *силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю и направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей точки.* На рисунке 1,а показаны материальные точки A и B , которые притягиваются друг к другу силами \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , причем $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Закон равенства действия и противодействия выполняется всегда, независимо от того движутся взаимодействующие тела или неподвижны. Любое из окружающих нас тел взаимодействует с Землей. На него со стороны Земли действует сила притяжения. Такая же по величине, но противоположная по направлению сила действует на Землю со стороны тела – в любом случае, падает оно на Землю или удерживается другими телами. Когда тело падает, то встречного движения Земли наблюдатель не ощущает, так как массы Земли и тела несопоставимы (масса Земли $\approx 6 \cdot 10^{24}$ кг).

При непосредственном контакте двух тел их взаимодействие распределено по поверхности. Но если размеры контактной площадки по сравнению с размерами тел достаточно малы, то взаимодействие можно считать сосредоточенным в точке и представить его в виде векторов двух сил. На рисунке 1,б тела 1 и 2 прижаты друг к другу другими телами в точке K (на схеме другие тела условно не показаны). В результате этого на тело 1 со стороны тела 2 действует сила \vec{F} , на тело 2 со стороны тела 1 – сила \vec{Q} . Эти силы равны по модулю и направлены по общей линии действия $n-n$ в противоположные стороны: $\vec{F} = -\vec{Q}$.

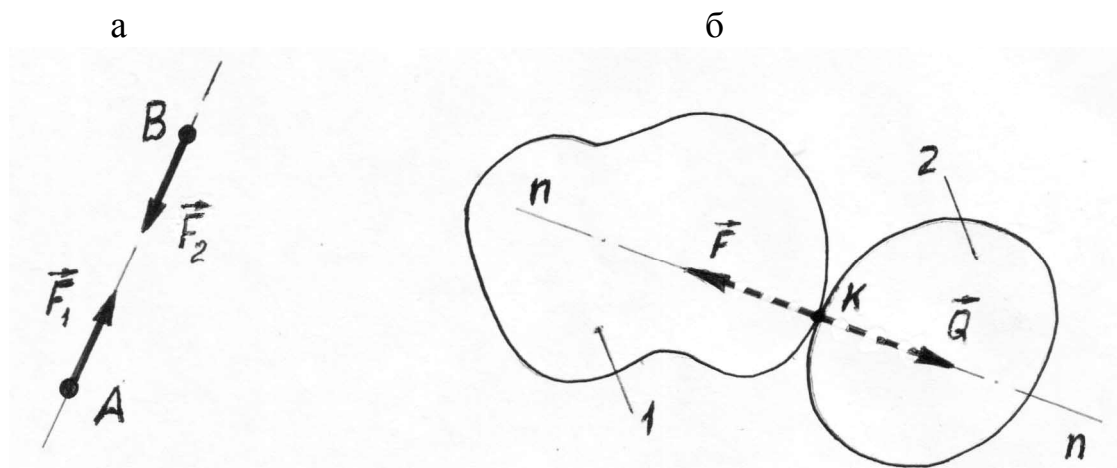


Рисунок 1 - Силы взаимодействия точек и тел

Величина силы в международной системе единиц измеряется в ньютонах ($1\text{Н} = 1\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$).

Таким образом, **вектор силы характеризуется величиной (модулем силы), точкой приложения и направлением действия. Точка приложения и направление действия определяют прямую, которая называется линией действия силы. Вектор силы изображает действие на рассматриваемое тело со стороны другого тела.**

Рассмотрим отдельно тело 1, рисунок 2. Действия на него **всех** других тел изобразим векторами сил, присвоив им порядковые номера: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. В данном случае $n = 4$, \vec{F}_1 – это сила \vec{F} на рисунке 1,б. Силы, действующие на рассматриваемое тело со стороны других тел, называются **внешними силами**.

Некоторые области тела 1 под действием системы внешних сил будут испытывать сжатие, другие – растяжение. Между смежными частицами тела в области растяжения ОР будут действовать **внутренние силы** притяжения, между частицами в области сжатия ОС – силы отталкивания. Внутренние силы каждой пары взаимодействующих частиц в соответствии с аксиомой 1 равны по модулю и противоположны.

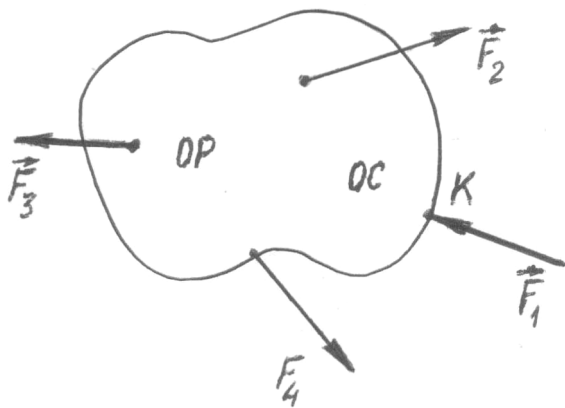


Рисунок 2 – Внешние силы, действующие на тело 1

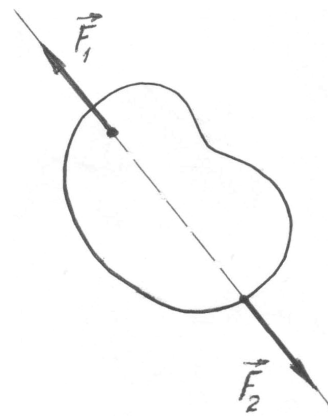


Рисунок 3 – Две уравновешенные силы

Если рассматривать тела 1 и 2 как единую систему (рисунок 1,б), то силы \vec{F} и \vec{Q} будут являться внутренними для этой системы. Внутренние силы выявляются, когда тело (или систему тел) мысленно разделяют на части и рассматривают одну из них. Действие «отброшенных» частей заменяют силами, которые для рассматриваемой части будут внешними. Силы \vec{F} и \vec{Q} были внутренними для всей системы, поэтому на рисунке 1,б они изображены штриховой линией; внутренние силы, действующие между частицами тела 1, на рисунке 2 не показаны.

• Внутренние силы тела обусловлены междуатомными связями, которые препятствуют деформации тела, т.е. изменению его формы под действием внешних сил. Природа этих связей в теоретической механике не рассматривается.

Многие тела обычно мало деформируются, пока величина внутренних сил не достигает некоторого предельного значения. Это обстоятельство приводит к абстрактному понятию абсолютно твердого тела, в котором расстояния между двумя любыми точками не изменяются под действием внешних сил. •

1.2 Уравновешенная система сил.

Аксиома 2 – о двух уравновешенных силах. Аксиома 3 – об отвердевании нетвердого тела

Система сил, под действием которой абсолютно твердое тело находится в равновесии, называется уравновешенной или эквивалентной нулю: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv 0$.

Признаки простейшей уравновешенной системы сил устанавливает аксиома о двух уравновешенных силах (аксиома 2). *Две силы уравновешены, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv 0$, рисунок 3, если они действуют на одно и то же абсолютно твердое тело, равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены по одной прямой в противоположные стороны ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$).*

Уравновешены, в частности, все внутренние силы абсолютно твердого тела (см. о них п.1.1). На рисунке 1 силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 не уравновешены, так как расстояние между материальными точками A и B может изменяться.

Очевидно, что если в равновесии находится нетвердое или упругое тело, то действующие на него силы (и внешние, и внутренние) также образуют уравновешенную систему. Об этом говорит аксиома 3 – об отвердевании нетвердого тела: *равновесие тела, способного деформироваться, не нарушится, если считать его отвердевшим (абсолютно твердым).*

Обратное утверждение не всегда справедливо. Если тело перестанет быть твердым, равновесие может нарушиться, так как под действием сил могут измениться расстояния между точками тела.

● Значение аксиомы об отвердевании заключается в том, что она позволяет устанавливать математические признаки уравновешенности системы сил, отвлекаясь от физических свойств тел. Однако формальная уравновешенность сил является необходимым, но недостаточным условием равновесия тела, способного деформироваться. Действительно, если две равные по модулю противоположные силы приложить к концам свободной пружины, равновесие нарушится, хотя обе внешние и все внутренние силы пружины в процессе деформации попарно равны и противоположны. Но если внешние силы плавно увеличивать и зафиксировать их при некотором значении, то сдеформированная пружина окажется в равновесии. При этом выполняется дополнительное условие, которое устанавливается законом Гука: при равновесии упругого тела деформация пропорциональна величине внешних сил (Роберт Гук, 1635 – 1703).

Отметим ещё, что отрезок абсолютно гибкой невесомой нити может находиться в равновесии, когда равные по модулю силы, приложенные к концам отрезка, направлены друг от друга. Но к точкам на концах этого отрезка нельзя приложить силы, направленные друг к другу. Концы гибкого отрезка можно приблизить без усилия, и нить сомнется. Гибкая нить способна как угодно изгибаться без сопротивления. ●

1.3 Эквивалентные системы сил.

Равнодействующая. Аксиомы 4 и 5 – о преобразовании сил

Две системы сил называются эквивалентными, если одну из них можно заменить другой системой, не изменяя состояния покоя или движения абсолютно твердого тела: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$.

Чтобы судить об уравновешенности или неуравновешенности любой сложной системы сил, её преобразуют, приводят к простейшему виду, т.е. сложную систему сил заменяют простой системой с помощью *эквивалентных преобразований*. Многие системы сил можно заменить одной силой. Сила, эквивалентная данной системе сил, называется **равнодействующей**. Она одна заменяет действие всех сил системы: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv \vec{R}$.

Правила преобразования сил устанавливают две аксиомы.

Аксиома 4 – закон параллелограмма сил: *две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в этой же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.*

Равнодействующая \vec{R} сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , приложенных к телу в точке A , рисунок 4,а, является геометрической суммой векторов этих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \quad (1)$$

Модуль вектора равнодействующей

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} ,$$

где α – угол между направлениями \vec{F}_1 и \vec{F}_2 .

Если силы направлены по прямой в одну сторону, то равнодействующая направлена в ту же сторону, а ее модуль равен сумме модулей сил: $R = F_1 + F_2$. Такой же результат получим по формуле (2) при $\alpha = 0$. Если направления сил противоположны ($\alpha = \pi$), то сила R направлена в сторону большей силы, а ее модуль $R = |F_1 - F_2|$.

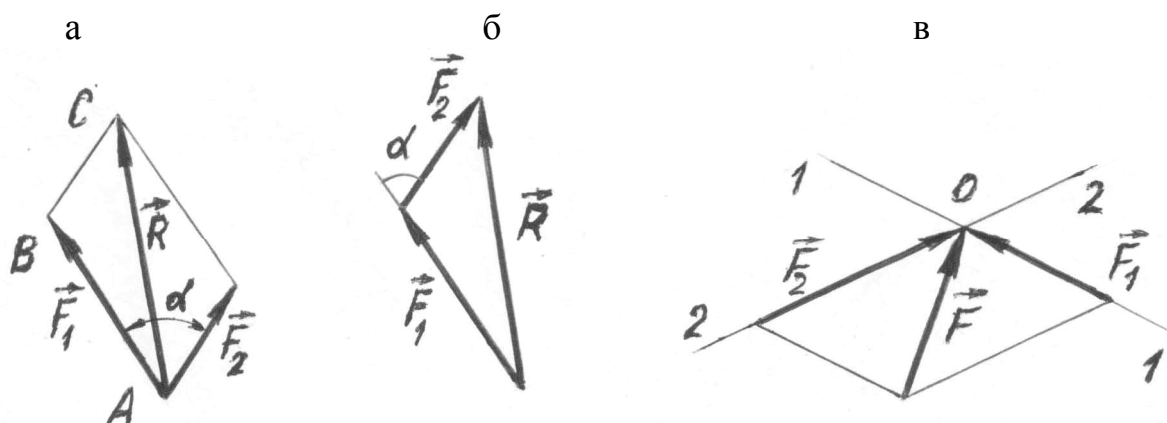


Рисунок 4 – Сложение двух сил (а, б), разложение силы на составляющие (в)

Замечая, что $\vec{BC} = \vec{F}_2$, для определения модуля и направления вектора \vec{R} получаем правило силового треугольника, рисунок 4.б. Прибавляемый вектор \vec{F}_2 проводится из конца первого \vec{F}_1 , результирующий \vec{R} – из начала первого в конец прибавляемого. Все три силы приложены к телу в данной точке A (построение треугольника вынесено за пределы тела).

Закон параллелограмма сил позволяет также *раскладывать силу на составляющие* – заменять ее двумя силами. Для этого через точку приложения силы \vec{F} (рисунок 4,в) в нужном направлении проводят линии действия 1-1 и 2-2 составляющих \vec{F}_1 и \vec{F}_2 так, чтобы они располагались в одной плоскости с вектором данной силы. На этих линиях как на сторонах строят параллелограмм, в котором данная сила является диагональю.

Составляющие изображают по сторонам параллелограмма так, чтобы они были приложены в той же точке, что и данная сила (на рисунке 4,в это точка O).

Аксиома 5 – о добавлении и исключении уравновешенной системы сил: действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней добавить или из нее исключить уравновешенную систему сил.

На основании аксиом 2 и 5 в условиях равновесия не учитываются внутренние силы. Если равновесие наблюдается, то независимо от физических свойств тела (аксиома 3) внутренние силы уравновешены и их можно отбросить.

Следствие аксиомы 5 – о переносе точки приложения силы: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль линии действия в любую точку тела.

Доказательство следствия. Пусть к телу в точке A приложена сила \vec{F} , рисунок 5,а. В произвольной точке B , лежащей на линии действия силы, приложим две уравновешенные силы $\vec{F}_1 = \vec{F}$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}$, рисунок 5,б.

Данная сила \vec{F} и сила \vec{F}_2 также будут уравновешены, поэтому их можно отбросить. Останется одна сила \vec{F}_1 , равная \vec{F} , но приложенная в точке B , рисунок 5,в. Так как были совершены эквивалентные преобразования: $\vec{F} \equiv (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv \vec{F}_1$, то сила \vec{F}_1 действует на абсолютно твердое тело так же, как сила \vec{F} . Поэтому вектор, изображающий данную силу \vec{F} , можно считать приложенным к твердому телу в любой точке на линии действия.

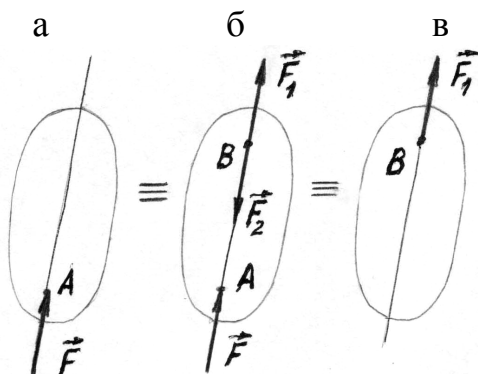


Рисунок 5 - Перенос силы по линии действия

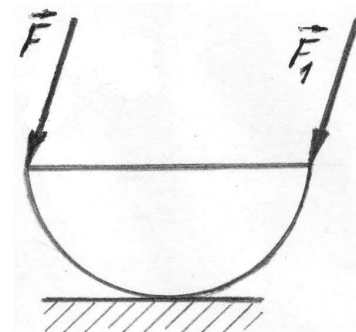


Рисунок 6 - Случай неэквивалентности двух равных сил

Вектор силы нельзя переносить с заданной линии на другую параллельную линию, так как изменится движение тела или, в случае равновесия, изменятся силы, действующие на рассматриваемое тело со стороны других тел. Например, силы \vec{F} и \vec{F}_1 на рисунке 6 равны, но не эквивалентны.

• При определении внутренних сил не всегда можно добавлять и исключать уравновешенные силы и переносить силу по линии действия. Если эти операции произвести на самом деле, то внутреннее состояние тела изменится. Сравните, например, состояние стенок «пустого» баллона и баллона, заполненного газом под большим давлением.

Аксиому 5 и её Следствие можно использовать только при определении внешних сил, принимая допущение, что отсутствуют деформации. Внутренние силы в сечениях деталей при расчёте их на прочность определяются в курсе сопротивления материалов. •

1.4 Связи и реакции связей. Принцип освобожденности от связей. Примеры связей

Рассмотрим, как образуется расчетная схема для определения неизвестных сил, приложенных к телу. Тело называется *свободным*, если другие тела взаимодействуют с ним на расстоянии, не соприкасаясь (падающее на землю тело, солнце, планеты). Перемещение свободного тела ничем не ограничено. •Подобрав соответствующие силы, можно обеспечить равновесие свободного тела (плазма в магнитном поле, вертолёт может зависать над землёй) или сообщить ему перемещение в любом направлении. •

Тело называется *несвободным*, если оно соприкасается (соединяется) с другим телом. Его движение оказывается стеснённым. *Тела, ограничивающие перемещение данного тела, называются связями*. Данное тело и тело, осуществляющее связь, действуют друг на друга равными по модулю, противоположными силами. *Сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело, называется реакцией связи*. (Реакция – это противодействие связи в ответ на действие данного тела.)

При решении задач в число приложенных к телу сил включают реакции связей. Этот прием носит название принципа освобожденности от связей: *всякое несвободное тело можно считать телом свободным, если мысленно отбросить связи и заменить их действие реакциями связей*. При этом можно представить, что все другие тела исчезли, а на данное тело действуют только векторы сил (причём состояние движения или покоя не изменилось!).

Реакция связи заранее неизвестна. Она зависит от заданных сил, действующих на тело, а также от других неизвестных реакций связей. Но принятые в технических расчетах допущения во многих случаях позволяют указать точку приложения и направление реакции. *Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает телу перемещаться*.

Рассмотрим несколько примеров связей, пренебрегая трением, то есть считая поверхности тел абсолютно гладкими. На схемах приложенные к телам заданные силы условно не показаны.

• Названия связей зависят или от свойств тела, осуществляющего связь, или от способа его соединения с рассматриваемым телом. На расчётных схемах показывают только те силы, которые действуют на рассматриваемое тело, поэтому силы, действующие на связи со стороны выбранного тела, не изображают. •

1. Гибкая нить, рисунок 7. Нить АВ ограничивает перемещение точки А тяжелого шара в направлении от В к А, поэтому **реакция нити (\vec{T}) направлена вдоль нити от А к В**.

2. Гладкая поверхность (рисунки 7 и 8) *не препятствует* скольжению рассматриваемого тела вдоль поверхности, поэтому **реакция гладкой поверхности (\vec{N}) направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке контакта**. •Нормаль к поверхности в данной точке – это прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в этой точке. •

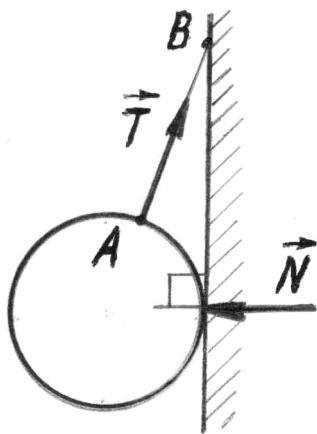


Рисунок 7 - Реакции нити и гладкой поверхности

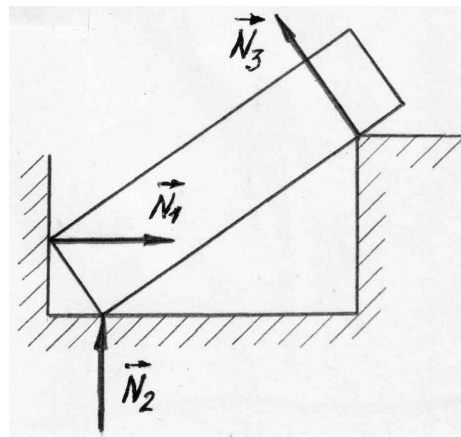


Рисунок 8 - Реакции гладкой поверхности

Если одно из тел имеет в точке контакта острый выступ, рисунок 8, то нормаль проводят к поверхности другого тела.

На схемах 7 и 8 связи мысленно отброшены и их действие на рассматриваемое тело заменено реакциями.

3. Цилиндрический шарнир, рисунок 9. Такое соединение тел 1 и 2 позволяет им вращаться относительно друг друга вокруг оси шарнира, проходящей через центр O перпендикулярно плоскости чертежа. Тело 1 имеет шип A ; его поперечное сечение заштриховано. Зазор между цилиндрической поверхностью шипа и отверстием тела 2 условно увеличен. Взаимодействие тел происходит по площадке контакта K : \vec{R}_1 – это реакция тела 2, приложенная к телу 1, \vec{R}_2 – реакция тела 1, приложенная к телу 2.

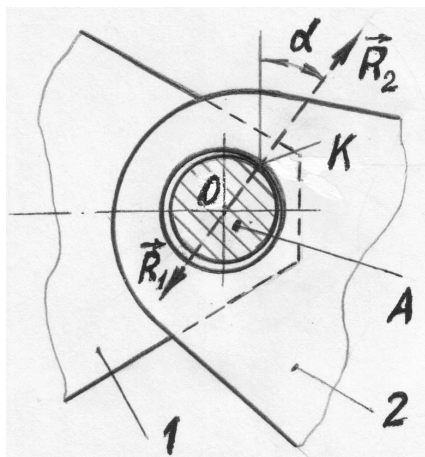


Рисунок 9 - Чертеж шарнирного соединения тел 1 и 2

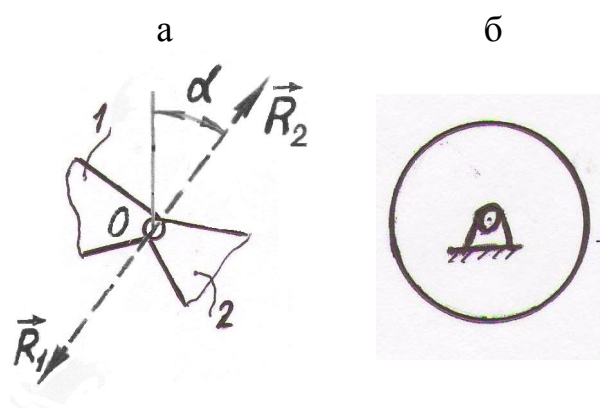


Рисунок 10 - Изображение шарнирных соединений на плоских схемах

Положение площадки K зависит от других сил, приложенных к телам, поэтому заранее неизвестны ни модуль, ни направление реакций (угол α).

Если не учитывают трение, то размерами шарнира пренебрегают (рисунок 10 и далее). Реакции прикладывают в точках тел на оси шарнира (как на рисунке 10,а).

При решении задач неизвестную по направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде двух составляющих, направленных параллельно координатным осям, проведенным перпендикулярно оси шарнира. На рисунке 11,а к рассматриваемому телу AB приложены составляющие \vec{X}_A и \vec{Y}_A реакции шарнира. Решив задачу, найдем \vec{X}_A , \vec{Y}_A и определим тем самым полную реакцию \vec{R}_A ; по модулю $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

В пространственной схеме на рисунке 13 составляющие реакции цилиндрического шарнира обозначены \vec{X}_B и \vec{Y}_B , на рисунке 15 – \vec{Y}_B , \vec{Z}_B .

• В технических устройствах шарнирное соединение осуществляется с помощью подшипников. В подшипниках скольжения зазор между поверхностями обычно не превышает 0,2...0,3мм. В Статике зазором пренебрегают. В подшипниках качения реакция шарнира представляет собой равнодействующую сил давления нескольких тел качения (шариков или роликов).•

4. Невесомый жесткий стержень. Стержень BC удерживает тяжелое тело AB , рисунок 11,а. Между шарнирами на концах стержня никакие заданные силы на него не действуют, силой тяжести стержня BC пренебрегаем.

Реакция невесомого стержня направлена по прямой линии, проходящей через оси шарниров на концах стержня.

Для доказательства рассмотрим стержень, к которому приложены только две силы $\vec{R}_B^{ст}$ и $\vec{R}_C^{ст}$ в точках B и C , рисунок 11,б.

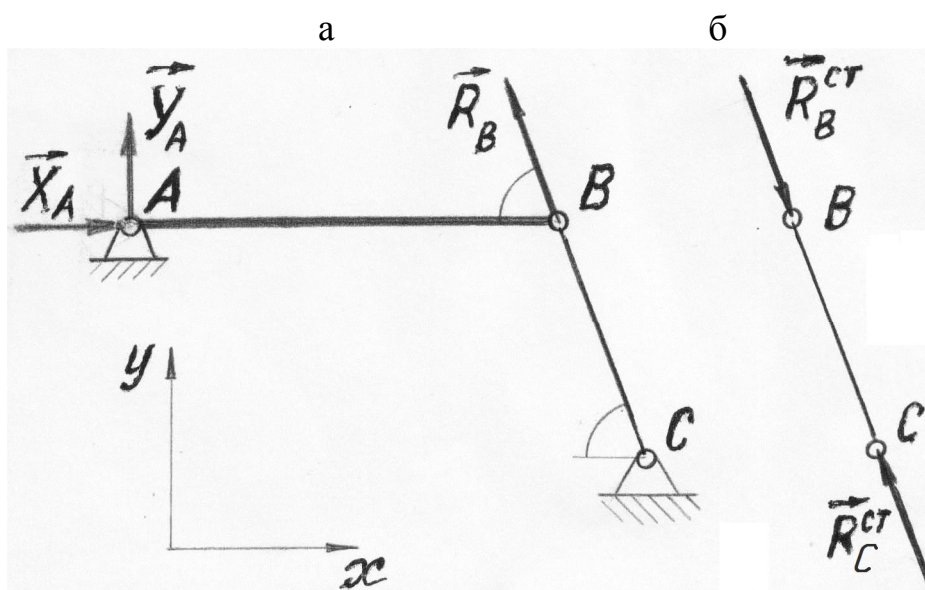


Рисунок 11 - Реакция невесомого жесткого стержня

Так как стержень находится в равновесии, то эти две силы уравновешены, – значит на основании аксиомы о двух уравновешенных силах направлены по прямой BC противоположно друг другу. В свою очередь, силы взаимодействия стержня и тела AB в соответствии с законом равенства действия и противодействия также направлены по одной прямой: $\vec{R}_B = -\vec{R}_B^{ст}$. Следовательно, реакция стержня \vec{R}_B действует на данное тело AB вдоль прямой BC .

5. Подвижный цилиндрический шарнир, рисунок 12,а. Реакция (\vec{R}_B) приложена к данному телу в точке на оси шарнира и направлена по нормали к опорной поверхности.

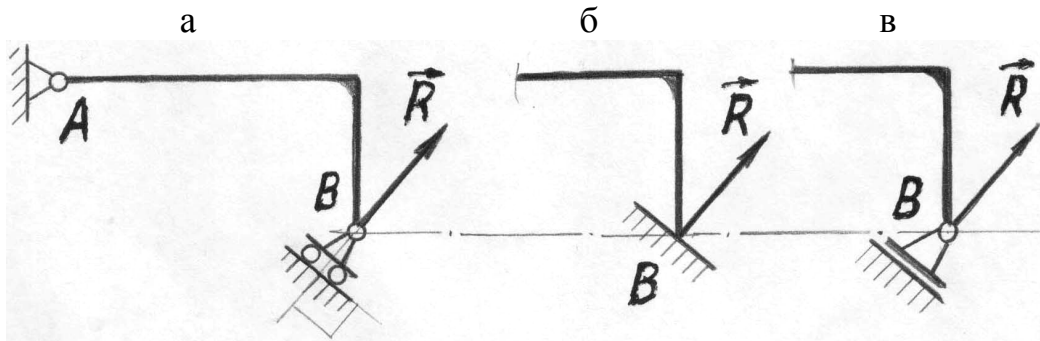


Рисунок 12 - Подвижный цилиндрический шарнир

Катки опоры B позволяют исключить появление дополнительных напряжений в длинных балках при изменении температуры. Такое изображение связи используют на схемах, даже если в реальной конструкции (рисунок 12,б) каретка и катки отсутствуют. Это делают для того, чтобы показать, что тело AB *опирается* на гладкую поверхность другого тела, а не крепится к нему жестко. Иногда на схемах не показывают катки, рисунок 12,в.

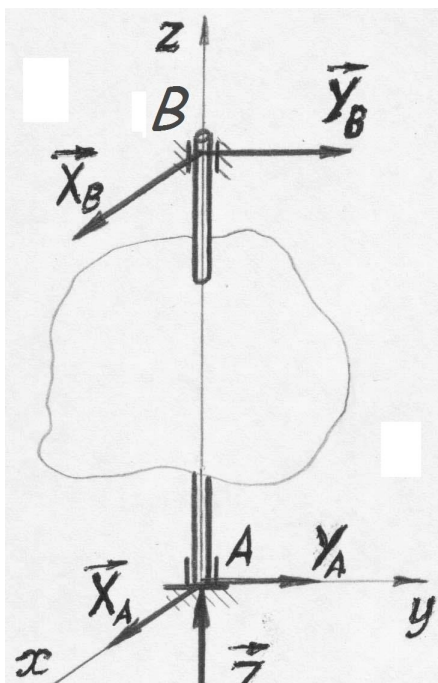


Рисунок 13 - Подпятник A и цилиндрический шарнир B

6. Подпятник. Это совокупность цилиндрического шарнира и опорной площадки, ограничивающей перемещение тела вдоль оси шарнира (рисунок 13, опора A). Реакцию подпятника представляют тремя составляющими, параллельными осям координат – $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$.

•В механизмах для осуществления такой связи используют радиальный и упорный подшипники или один радиально-упорный подшипник. Перекос оси вала в подпятнике не допускается, поэтому используют вторую опору – цилиндрический шарнир B .•

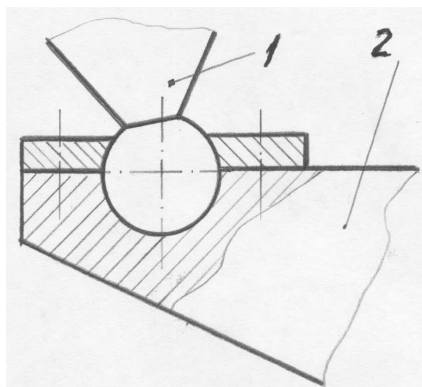


Рисунок 14 - Сферический шарнир

7. Сферический шарнир (рисунок 14). Шар, жестко соединённый с телом 1, устанавливается в сферическую обойму тела 2. Такое соединение позволяет одному телу как угодно вращаться относительно другого вокруг центра шарнира. Линия действия реакции проходит через центр шарнира и может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию сферического шарнира раскладывают на три составляющие – $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, рисунок 15, опора A .

На рисунке 15 построена расчетная схема для определения реакций, обеспечивающих равновесие плиты. Показана заданная сила \vec{P} , сила тяжести \vec{G} и реакции всех связей – сферического шарнира A , цилиндрического шарнира B , невесомого стержня. Проставлены необходимые размеры.

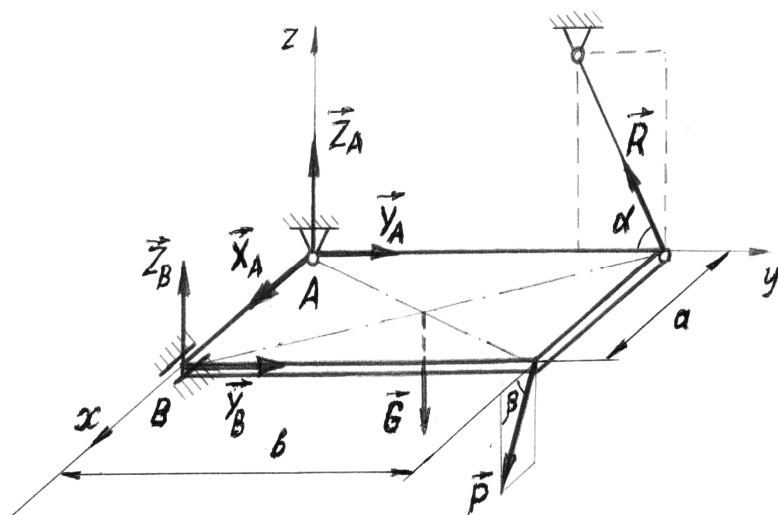


Рисунок 15 - Система сил, приложенных к плите

Плита находится в равновесии. Поэтому все приложенные к ней силы образуют уравновешенную систему. Из этого условия определяются неизвестные значения реакций связей.

В дальнейшем будет рассмотрен ещё один вид связи – «жесткая заделка» (смотрите пункт 4,2).

2. МОМЕНТ СИЛЫ. ПАРА СИЛ

Момент силы относительно точки (или относительно оси) характеризует стремление силы повернуть тело относительно этой точки (или оси).

2.1 Алгебраический момент силы относительно точки. Теорема Вариньона

На рисунке 16 сила \vec{F} приложена к телу в точке A . Определим её момент относительно точки O . Линия действия силы и точка O на рисунке расположены в плоскости чертежа.

Если сила стремится повернуть тело вокруг точки против хода часовой стрелки, то момент считают положительным, если по ходу часовой стрелки – отрицательным. На рисунке момент силы \vec{F} относительно точки O больше нуля: $M_O(\vec{F}) > 0$. Точку, относительно которой определяют момент, удобно называть *центром момента*.

Модуль момента силы относительно точки равен произведению модуля силы на плечо. Плечо – это кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы. Момент силы измеряется в ньютон-метрах (Н·м).

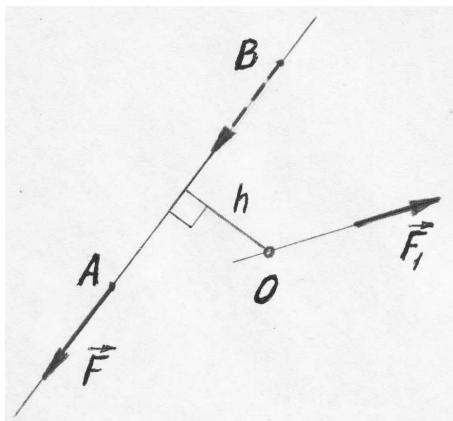


Рисунок 16 - Момент силы относительно точки

Чтобы найти плечо, надо провести линию действия силы и определить длину перпендикуляра, опущенного на эту линию из центра момента. На рисунке плечо – это размер h , тогда

$$M_O(\vec{F}) = +F \cdot h. \quad (2)$$

Момент силы относительно точки не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль линии её действия. Действительно, если силу \vec{F} приложить в точке B , то не изменятся ни её модуль, ни плечо, ни направление поворота вокруг точки O .

Момент силы относительно точки равен нулю, когда линия действия силы проходит через эту точку, так как в этом случае плечо равно нулю. На рисунке 16 момент $M_O(\vec{F}_1) = 0$ (расстояние от точки O до линии действия силы \vec{F}_1 равно нулю).

Важное свойство моментов сил выражает теорема Вариньона: *если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно некоторой точки (или оси) равен сумме моментов всех сил данной системы относительно этой же точки (или оси)*. Доказательство теоремы смотрите в учебниках [1, 2].

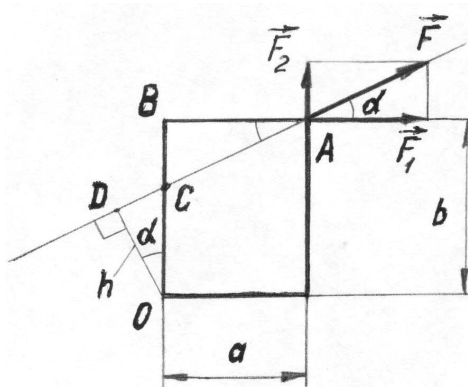


Рисунок 17 – Применение теоремы Вариньона

В примере на рисунке 17 даны размеры a, b, α . Разложим силу \vec{F} на составляющие \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (сила \vec{F} для них является равнодействующей). С помощью теоремы Вариньона легко находим

$$M_o(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) = -(F \cos \alpha) \cdot b + (F \sin \alpha) \cdot a.$$

Решая совместно треугольники ABC и ODC , можно найти плечо $h = b \cos \alpha - a \sin \alpha$ силы \vec{F} и её момент $M_o(\vec{F}) = -F \cdot h$, получив такой же результат.

Таким образом, теорему Вариньона удобно применять при решении практических задач, а не только в теоретических преобразованиях.

2.2 Момент силы относительно оси

На рисунке 18 тело может вращаться вокруг оси Oz . Приложим к нему в точке A силу \vec{F} . Через точку A проведем плоскость Π , перпендикулярную оси. Точку пересечения оси с плоскостью обозначим B .

Разложим силу \vec{F} на составляющие \vec{F}_z , параллельную Oz , и \vec{F}_Π , лежащую в плоскости Π . Составляющая \vec{F}_z может лишь сдвинуть тело вдоль оси Oz , значит $M_z(\vec{F}_z) = 0$. Повернуть тело вокруг оси стремится сила \vec{F}_Π . Это стремление количественно выражается её моментом относительно точки B .

Тогда, по теореме Вариньона, момент силы \vec{F} относительно оси равен

$$M_z(\vec{F}) = M_B(\vec{F}_\Pi) = \pm (F \cdot \cos \alpha) \cdot h, \quad (3)$$

где h – плечо силы \vec{F}_Π относительно точки B ; α – угол между линией действия силы \vec{F} и плоскостью Π ; в скобках – $(F \cdot \cos \alpha)$ – модуль силы \vec{F}_Π .

Момент силы относительно оси считается положительным, если со стороны положительного направления оси (взгляд «против оси») поворот тела под действием силы виден против хода часовой стрелки. На рисунке момент $M_z(\vec{F}) > 0$, – положительный.

• Это соответствует «правилу правого винта»: если винт с правой нарезкой резьбы вращать положительным моментом, то тело винта будет смещаться относительно гайки в положительном направлении оси. •

Сила \vec{F}_Π – это проекция силы \vec{F} на плоскость Π , следовательно, чтобы найти момент силы \vec{F} относительно оси, надо

- 1 – построить плоскость, перпендикулярную оси;
- 2 – построить проекцию силы на плоскость;
- 3 – определить момент этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью.

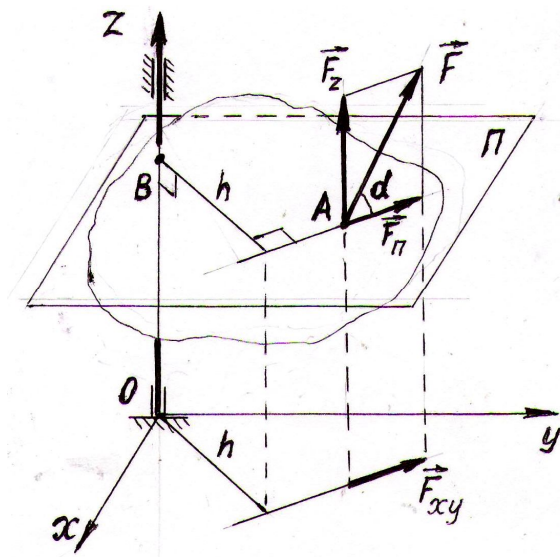


Рисунок 18 - К определению момента силы относительно оси Oz

момент силы \vec{F}_{xy} относительно точки пересечения оси Oz с плоскостью xOy , равное h , также не изменится. Следовательно,

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_{xy}) = (F \cdot \cos \alpha) \cdot h.$$

При определении моментов силы относительно координатных осей её обычно раскладывают на составляющие, параллельные осям, и применяют теорему Вариньона.

Пример 1, рисунок 19,а. Вал со шкивом радиуса R удерживается цилиндрическими шарнирами в точках O и A . По касательной к поверхности шкива действует реакция каната \vec{P} . Положение K точки схода каната определяется углом α . Задан размер $a = OC$. Определить моменты силы \vec{P} относительно осей x, y, z .

Разложим силу \vec{P} на составляющие, параллельные осям x и z . Их модули $P_x = P \sin \alpha$; $P_z = P \cos \alpha$. Относительно оси Ox момент имеет только составляющая \vec{F}_z (\vec{P}_x параллельна Ox). Сила \vec{P}_z лежит в плоскости $BCKN$, перпендикулярной оси Ox . Плечо силы \vec{P}_z относительно точки B , в которой ось Ox пересекается с плоскостью $BCKN$, равно $BD = a$. Тогда момент силы \vec{P} относительно оси x равен

$$M_x(\vec{P}) = M_B(\vec{P}_z) = +(P \cos \alpha) \cdot a.$$

Момент силы относительно оси – величина алгебраическая, так как положение оси в пространстве и её положительное направление заданы.

Анализ формулы (3) показывает, что момент силы относительно оси равен нулю, когда сила параллельна оси (тогда $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$) и когда линия действия силы пересекает ось (в этом случае $h = 0$).

Значение момента относительно оси не изменится, если силу \vec{F} спроецировать на любую плоскость, перпендикулярную оси. Например, проекция силы \vec{F} на плоскость xOy равна $\vec{F}_{xy} = \vec{F}_\Pi$, её модуль $F_{xy} = (F \cdot \cos \alpha)$. Плечо

Для определения момента силы \vec{P} относительно оси Oy нет необходимости рассматривать её составляющие, так как она сама лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси, и известно её плечо относительно точки C , равное R , тогда

$$M_y(\vec{P}) = -P \cdot R.$$

Относительно оси Oz имеет момент составляющая \vec{P}_x . Её плечо $LM = a$, тогда

$$M_z(\vec{P}) = M_M(\vec{P}_x) = +(P \sin \alpha) \cdot a.$$

Моменты силы \vec{P} относительно осей x и z не равны нулю. Однако поворот вала вокруг этих осей невозможен. Этому препятствует другая сила – реакция в опоре A .

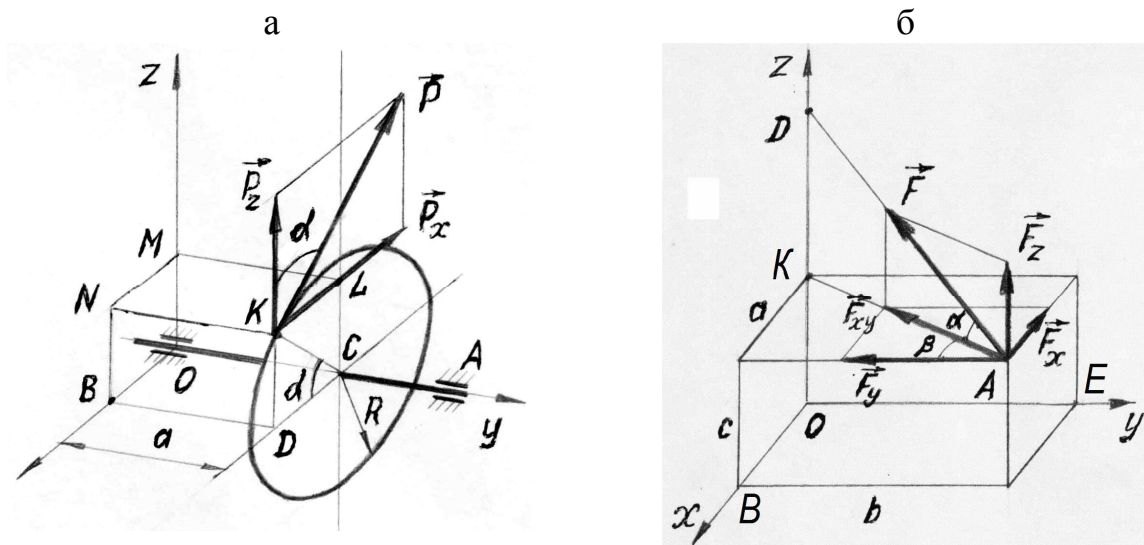


Рисунок 19 - Определение моментов сил относительно осей

Пример 2, рисунок 19,б. Сила \vec{F} приложена в точке A и пересекает ось z в точке D . Известны размеры a, b, c, α, β .

В данном случае силу \vec{F} по направлениям осей можно разложить в два приема. Воспользовавшись тем, что задан угол α , по правилу параллелограмма построим составляющие \vec{F}_z и \vec{F}_{xy} , параллельные, соответственно, оси Oz и плоскости xy . Силу \vec{F}_{xy} разложим затем на составляющие \vec{F}_x и \vec{F}_y . Модули составляющих равны

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cos \alpha \cdot \sin \beta; \\ F_y &= F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta; \\ F_z &= F \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (a)$$

Моменты силы \vec{F} относительно осей x и y равны

$$\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= M_B(\vec{F}_y) + M_B(\vec{F}_z) = (F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) \cdot c + (F \cdot \sin \alpha) \cdot b; \\ M_y(\vec{F}) &= M_E(\vec{F}_x) + M_E(\vec{F}_z) = -(F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot c - (F \cdot \sin \alpha) \cdot a. \end{aligned} \quad (б)$$

Момент относительно оси z равен нулю, так как линия действия силы \vec{F} пересекает ось. (Докажите, что сумма $M_K(\vec{F}_x) + M_K(\vec{F}_y) = 0$.)

2.3 Момент силы относительно точки как вектор

Для исследования системы сил, как угодно расположенных в пространстве, целесообразно ввести понятие векторного момента силы относительно точки. На рисунке 20 сила \vec{F} приложена к телу в точке A .

Проведем плоскость Q , в которой лежат линия действия силы \vec{F} и точка O , относительно которой определим момент. Модуль момента

$$M_o(\vec{F}) = F \cdot h, \quad (4)$$

где h – плечо силы \vec{F} относительно точки O .

Если отрезок $AB=F$ на рисунке считать основанием, а плечо h – высотой треугольника OAB , то модуль момента может быть выражен удвоенной площадью этого треугольника:

$$M_o(\vec{F}) = 2 \text{ пл. } \triangle OAB. \quad (5)$$

Векторный момент $\vec{M}_o(\vec{F})$ проводим из точки O – центра момента – перпендикулярно плоскости Q в ту сторону, откуда поворот тела под действием силы виден против хода часовой стрелки.

Вектор $\vec{M}_o(\vec{F})$ единственным образом определяет положение в пространстве точки O , линии действия силы \vec{F} и направление поворота тела. Если тело присоединить в точке O к неподвижному основанию с помощью сферического шарнира, то сила \vec{F} будет стремиться повернуть тело вокруг оси On , вдоль которой проведен вектор $\vec{M}_o(\vec{F})$.

Введенный таким образом момент силы относительно точки можно представить в виде векторного произведения:

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (5)$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки приложения силы, проведенный в плоскости Q из центра момента O .

Действительно, модуль векторного произведения равен произведению трёх величин: модулей перемножаемых векторов и синуса угла между направлениями векторов (на рисунке этот угол обозначен α). Учитывая, что $r \cdot \sin \alpha = h$, получим значение модуля, определяемое формулой (4):

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot h.$$

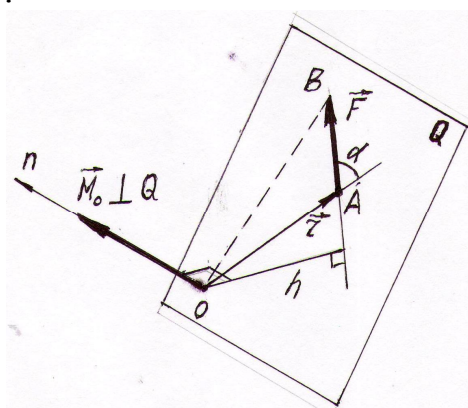


Рисунок 20 - Векторный момент силы относительно точки

Направление результирующего вектора векторного произведения в математике определяется по правилу правого винта: первый вектор произведения (\vec{r}) мысленно поворачивают вокруг его начала (точка O) до совпадения с направлением второго вектора (\vec{F}). (На рисунке – это поворот вектора \vec{r} в плоскости Q на угол α). Результирующий вектор произведения ($\vec{r} \times \vec{F}$) проводят перпендикулярно плоскости поворота в ту сторону, откуда поворот виден против хода часовой стрелки. Это направление совпадает с направлением векторного момента $\vec{M}_O(\vec{F})$, введенного исходя из представления о моменте силы в механике.

2.4 Зависимость между моментами силы относительно точки и относительно оси, проходящей через эту точку

При решении задач от векторного представления момента силы (удобного в теоретических преобразованиях) необходимо переходить к определению алгебраического момента относительно оси. Связь между ними устанавливает следующая теорема:

Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось векторного момента силы относительно точки, взятой на оси.

Выберем произвольную точку O и проведем ось Oz , рисунок 21. Векторный момент \vec{M}_O данной силы \vec{F} относительно центра O направлен перпендикулярно плоскости треугольника OAB . Через точку O проведем плоскость Π , перпендикулярную оси Oz . Построим проекцию \vec{F}_Π данной силы на эту плоскость.

Модули моментов силы \vec{F} относительно центра O и относительно оси Oz выразим через площади треугольников:

$$M_O(\vec{F}) = 2 \text{ пл. } \triangle OAB, \quad M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_\Pi) = 2 \text{ пл. } \triangle Oab. \quad (\text{а})$$

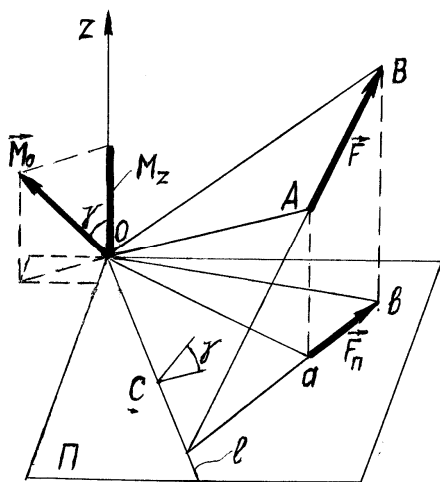


Рисунок 21 - Моменты силы относительно точки \vec{M}_O и относительно оси M_z

Треугольник Oab представляет собой проекцию треугольника OAB на плоскость Π . Из геометрии известно, что площадь проекции равна площади проецируемой фигуры умноженной на косинус двугранного угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции, т.е.

$$\text{Пл. } \triangle Oab = \text{Пл. } \triangle OAB \cdot \cos \lambda, \quad (\text{б})$$

где λ – угол между плоскостями. На рисунке стороны угла проведены из точки C в плоскостях треугольников перпендикулярно линии пересечения плоскостей Ol .

Из соотношений (а) и (б) получаем зависимость

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}) \cdot \cos \lambda. \quad (6)$$

Двугранный угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к плоскостям, следовательно, угол между вектором \vec{M}_o и осью Oz равен λ . Тогда отрезок M_z , представляющий на рисунке 21 момент относительно оси, является проекцией вектора \vec{M}_o на ось. Теорема доказана.

Справедливость равенства (5) позволяет получить *аналитические выражения*, определяющие моменты силы *относительно координатных осей* и их связь с векторным моментом *относительно начала координат*.

Проведём радиус-вектор \vec{r} из начала координат в точку приложения силы (рисунок 22), векторное произведение в формуле (5) представим определителем третьего порядка и разложим его по элементам первой строки:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x), \quad (7)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы – орты координатных осей; x, y, z – проекции радиус-вектора \vec{r} , равные координатам точки приложения силы; F_x, F_y, F_z – проекции вектора силы.

Три слагаемых в правой части формулы (7) представляют собой составляющие вектора \vec{M}_o , направленные по осям координат, а выражения в скобках – это проекции вектора \vec{M}_o на координатные оси:

$$M_{Ox} = (yF_z - zF_y); \quad M_{Oy} = (zF_x - xF_z); \quad M_{Oz} = (xF_y - yF_x). \quad (8)$$

В соответствии с доказанной теоремой формулы (8) определяют также моменты силы относительно координатных осей: $M_x = M_{Ox}$, $M_y = M_{Oy}$, $M_z = M_{Oz}$.

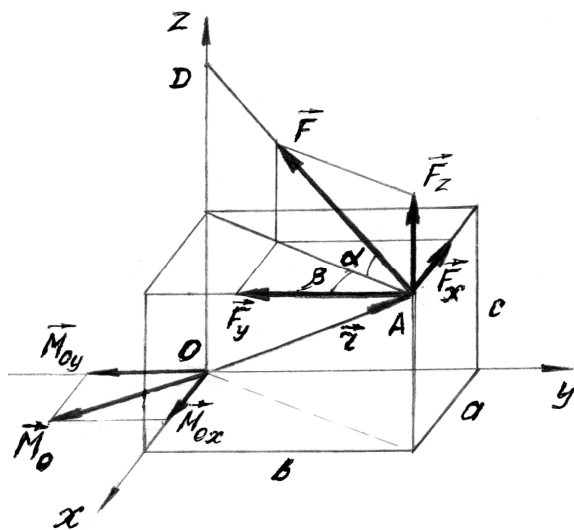


Рисунок 22 – К определению моментов силы относительно осей (пример)

Пример. Обратимся, ещё раз, к Примеру 2 в параграфе 2.2 (рисунок 19,б). Построим дополнительно радиус-вектор \vec{r} , определяющий положение точки A относительно начала координат, и векторный момент \vec{M}_o в плоскости xOy перпендикулярно треугольнику OAD , рисунок 22.

Координаты точки A –

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Проекция силы \vec{F} –

$$F_z = -F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta; \quad F_y = -F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta;$$

$$F_x = F \cdot \sin \alpha.$$

•Заметим, что в Примере 2 пункта 2.2 определялись модули составляющих, параллельных осям координат (формулы (а)).•

Подставляя значения в формулы (8), найдем проекции вектора \vec{M}_O на оси x и y :

$$M_{Ox} = (yZ - zY) = b \cdot F \sin \alpha + cF \cos \alpha \cdot \cos \beta ;$$

$$M_{Oy} = (zX - xZ) = -c \cdot F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - a \cdot F \sin \alpha .$$

Сравнивая эти ответы и значения, полученные в Примере 2 пункта 2.2, видим, что проекции вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на оси x и y действительно равны моментам силы \vec{F} относительно этих осей.

По схеме на рисунке 22 видно, что проекция вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на ось z равна нулю. Это можно доказать аналитически, определив значение M_{Oz} из формулы (8), учитывая,

что $a/b = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$:

$$\begin{aligned} M_{Oz} &= x \cdot Y - y \cdot X = -a \cdot F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + b \cdot F \cos \alpha \cdot \sin \beta = \\ &= b \cdot \left(-\frac{\sin \beta}{\cos \beta} F \cos \alpha \cdot \cos \beta + F \cos \alpha \cdot \sin \beta \right) = 0. \end{aligned}$$

2.5 Система двух параллельных сил. Пара сил

Аксиомы статики позволяют доказать [1, 2], что *две параллельные силы, направленные в одну сторону, имеют равнодействующую, направленную в ту же сторону. Модуль равнодействующей равен сумме модулей данных сил; линия действия равнодействующей делит расстояние между линиями действия данных сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные силам.*

Таким образом, рисунок 23, а,

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{BC}{AC}. \quad (9)$$

Если две параллельные силы направлены в разные стороны и не равны по модулю (рисунок 23,б; $F_2 > F_1$), то равнодействующая направлена в сторону большей силы; модуль равнодействующей равен разности модулей данных сил. Линия действия равнодействующей делит расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные силам внешним образом (проходит за пределами отрезка AB со стороны большей силы):

$$R = |F_2 - F_1|; \quad (a)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (б)$$

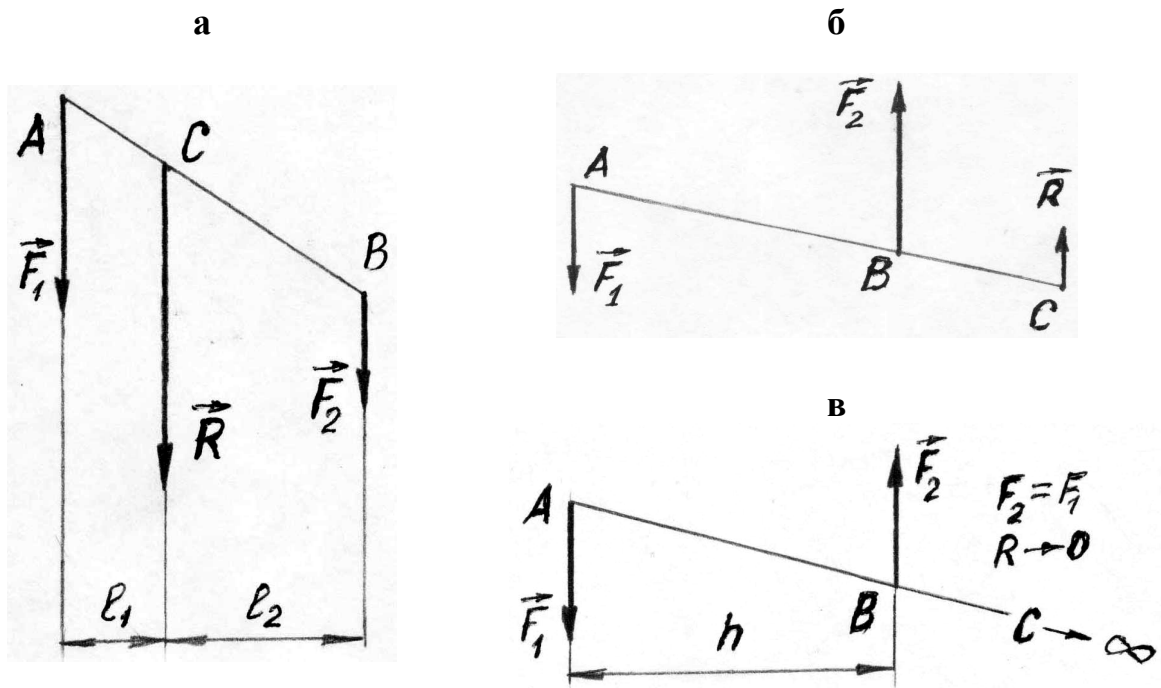


Рисунок 23 – Равнодействующая двух параллельных сил. Пара сил

Введем понятие **пары сил**. В равенство (б) подставим $AC = AB + BC$, рисунок 23,б, и выразим

$$BC = \frac{F_1}{F_2 - F_1} \cdot AB. \quad (\text{в})$$

Совершим предельный переход: модуль F_2 будем постепенно приближать к модулю F_1 . Тогда по формуле (а) модуль равнодействующей будет стремиться к нулю, а размер BC по формуле (в) – к бесконечности:

$$R \rightarrow 0; \quad BC \rightarrow \infty.$$

Равнодействующая *исчезает*, но равные по модулю силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 не уравновешены, так как они не лежат на одной прямой, рисунок 23, в.

Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны, называется парой сил. Плоскость, в которой лежат линии действия сил, называется плоскостью пары. Расстояние h между линиями действия сил называется плечом пары.

Наряду с вектором силы пара является простейшей неуравновешенной системой, которую нельзя заменить одной силой. **Пара сил стремится повернуть тело, к которому она приложена.**

2.6 Момент пары сил. Эквивалентные преобразования пар

Выберем в плоскости пары (\vec{F}_1, \vec{F}_2) , рисунок 24,а, произвольную точку O и определим сумму моментов сил пары относительно этой точки. Учитывая равенство модулей сил, находим

$$M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) = F_1 \cdot (h + OC) - F_2 \cdot OC = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h. \quad (10)$$

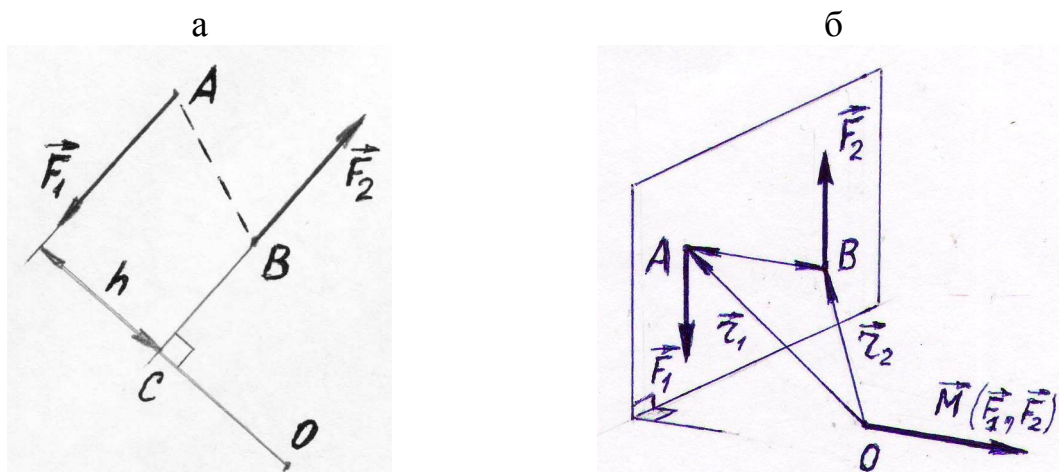


Рисунок 24 – К определению алгебраического и векторного моментов пары

Полученный результат называют алгебраическим моментом пары сил. Модуль момента равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары. Момент считают положительным, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки. На рисунке момент пары $M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) > 0$.

Для исследования системы пар, как угодно расположенных в пространстве, введем векторный момент пары $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Найдем сумму моментов-векторов сил относительно произвольной точки O , рисунок 24, б,

$$\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$

Преобразуем дважды, подставив сначала $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{AB}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, $\vec{AB} = -\vec{BA}$, а затем $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{BA}$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $\vec{BA} = -\vec{AB}$. Получим два одинаковых значения

$$\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{AB} \times \vec{F}_2. \quad (11)$$

Модули произведений $\vec{BA} \times \vec{F}_1$, $\vec{AB} \times \vec{F}_2$ равны между собой. По правилу векторного произведения определяем, что *векторный момент пары направлен перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда поворот пары виден против хода часовой стрелки*.

Относительно любой произвольной точки O векторный момент пары сил имеет одно то же значение, следовательно, векторный момент пары – это свободный вектор. Его можно приложить в любой точке тела, сохраняя модуль и направление.

Это означает, что **данная пара сил одинаково стремится повернуть тело вокруг любой оси, перпендикулярной плоскости пары.**

В учебниках [1, 2] доказаны теоремы об эквивалентности и о сложении пар, которые позволяют производить тождественные преобразования:

Действие пары на твердое тело не изменяется, если, сохраняя модуль момента и направление поворота:

- 1 – как угодно переносить пару в плоскости действия – схемы **а** и **б** рисунка 25;
- 2 – одновременно изменять модуль сил и плечо – схемы **а** и **в** рисунка;
- 3 – переносить пару в любую плоскость, параллельную плоскости этой пары, рисунок 25,г.
- 4 – Пары можно складывать, получая результирующую пару, которая заменяет действие всех пар.

Для плоской системы пар момент результирующей пары определяют как сумму алгебраических моментов составляющих пар:

$$M_{\Sigma} = \Sigma M_k. \quad (12)$$

Для пространственной системы пар векторный момент результирующей пары равен сумме моментов-векторов составляющих пар:

$$\vec{M}_{\Sigma} = \Sigma \vec{M}_k. \quad (13)$$

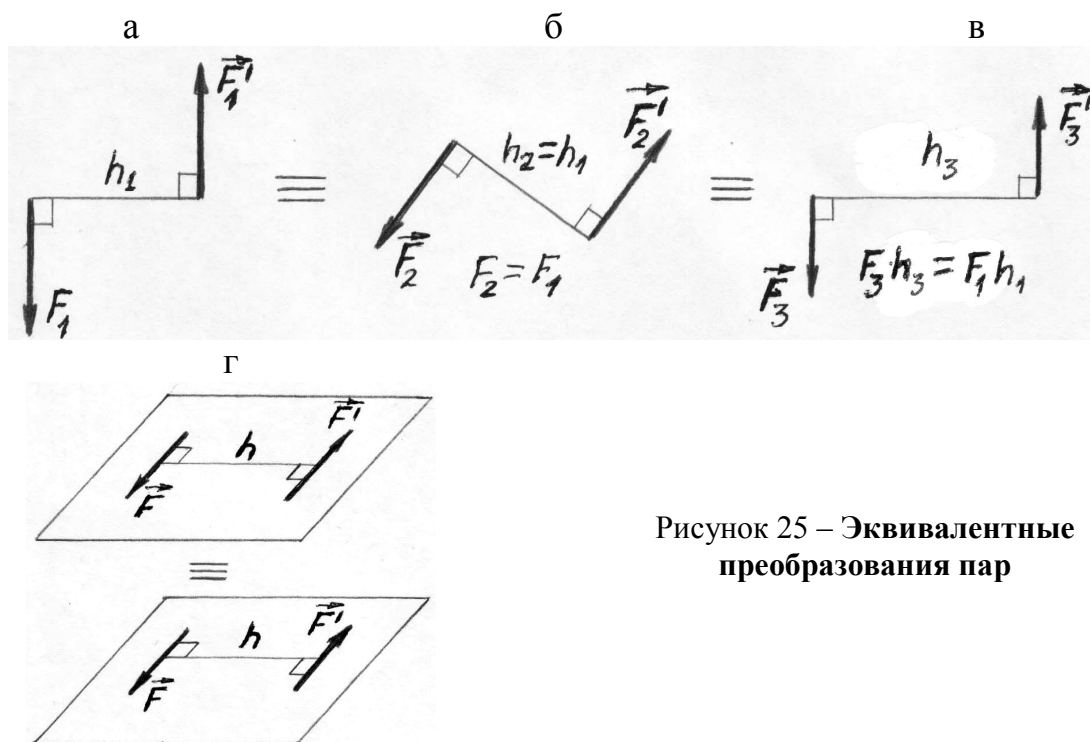


Рисунок 25 – Эквивалентные преобразования пар

Если найден момент результирующей пары, то, выбрав длину плеча H , можно найти модуль сил результирующей пары $R_1 = R_2 = M(\vec{R}_1, \vec{R}_2) / H$ или, выбрав модуль сил R , определить плечо $H = M / R$.

Момент пары можно изобразить тремя способами, рисунок 26: **а** – двумя равными по модулю противоположными силами; **б** – векторным моментом; **в** – дуговой стрелкой, проведенной в плоскости пары.

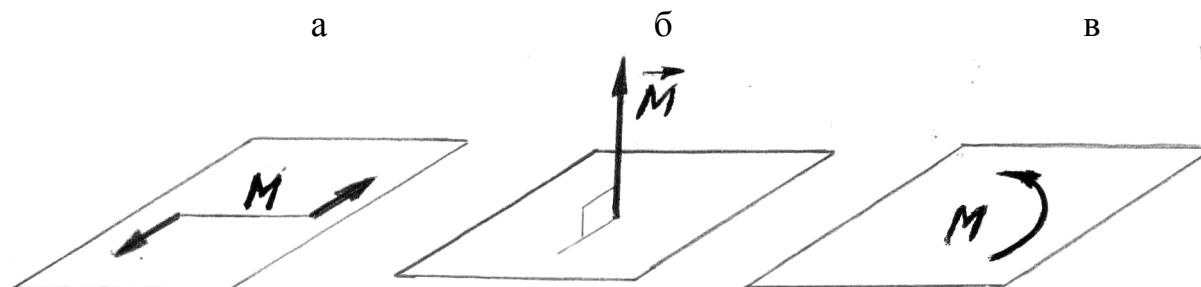


Рисунок 26 – Изображения момента пары на схемах

• Парой сил можно представить силы трения, приложенные к тормозному барабану со стороны колодок; взаимодействие тел в соединительных муфтах соосных вращающихся валов. В некоторых случаях взаимодействие тел нельзя изобразить векторами сил, однако его можно представить моментом. Вращательный момент действует, например, на ротор электродвигателя. В этом случае момент является результатом взаимодействия электромагнитных полей обмоток ротора и статора.

Исследовал пары сил и ввел термины «пара», «плечо», «момент» французский ученый Луи Пуансо (1777-1859), разработавший теорию эквивалентных преобразований систем сил. •

3 ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКЕ (ЦЕНТРУ ПРИВЕДЕНИЯ). УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ

3.1 Главный вектор и главный момент системы сил. Классификация систем сил

Приведение системы сил к центру позволяет заменить её более простой системой, эквивалентной данной системе. В этой главе будет показано, что в общем случае *систему сил можно заменить одной силой, называемой главным вектором системы сил, и одной парой сил, момент которой называют главным моментом системы сил.*

Главный вектор системы сил приложен в центре приведения и равен векторной сумме всех сил данной системы:

$$\vec{R}_O = \sum \vec{F}_k. \quad (14)$$

Главный момент системы сил равен сумме моментов всех данных сил относительно центра приведения:

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k). \quad (15)$$

Индекс «O» обозначает точку, выбранную в качестве центра приведения. Векторы \vec{R}_O и \vec{M}_O зависят от всех сил, входящих в данную систему. В зависимости от расположения в пространстве линий действия сил различают следующие системы:

1 – произвольные пространственные системы сил, линии действия которых расположены как угодно в пространстве;

2 – произвольные плоские системы, в которых силы расположены как угодно в одной плоскости;

3 – пространственные (а) и плоские (б) системы сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в одной точке;

4 – пространственные (а) и плоские (б) системы параллельных сил.

5 – системы, которые состоят только из пар сил, лежащих в одной плоскости (а) или как угодно в пространстве (б). В пункте 2.6 было уже сказано, что пары сил можно складывать, т.е. систему пар можно заменить одной результирующей парой. Для плоской системы пар достаточно определить алгебраический момент результирующей пары по формуле (12), для пространственной системы – векторный момент результирующей пары по формуле (13). Приводить к центру систему пар нет необходимости, так как

главный вектор системы пар равен нулю, а сумма моментов сил результирующей пары относительно *любой* точки имеет одно и то же значение.

Заметим ещё, что *если разные системы сил имеют одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра приведения, то все эти системы сил эквивалентны.*

3.2 Приведение силы к центру (метод Пуансо)

Способ приведения сил к центру рассмотрим на примере одной силы \vec{F} , приложенной к телу в точке A , рисунок 27,а.

Выберем произвольную точку O . Приложим в этой точке две уравновешенные силы $\vec{F}_O = \vec{F}$ и $\vec{F}' = -\vec{F}$ (см. Аксиомы 2 и 5).

Данная сила \vec{F} и сила \vec{F}' образуют пару сил. Плоскость Π пары определяется линией действия силы \vec{F} и выбранным центром O . (Чертежи на рисунке 27 пространственные; для наглядности проведены взаимноперпендикулярные оси x, y, z .)

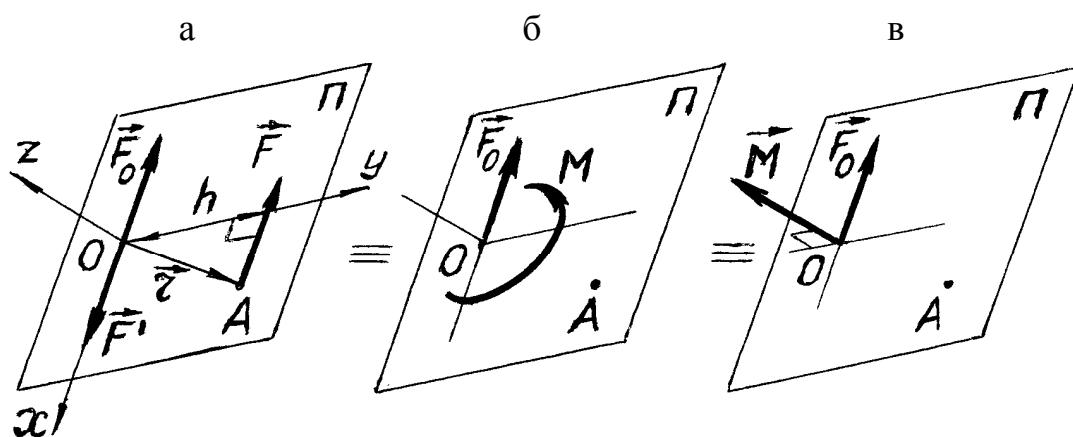


Рисунок 27 – Приведение силы к центру

Модуль момента пары равен $F \cdot h$. Векторный момент пары определим как момент данной силы \vec{F} относительно центра O (см. п. 2.6):

$$\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

где \vec{r} – радиус-вектор точки приложения данной силы относительно выбранного центра O .

В результате приведения силы к центру получаем такую же силу ($\vec{F}_O = \vec{F}$), приложенную в этом центре, и дополнительную пару, момент которой равен моменту данной силы относительно центра приведения.

Таким образом, силу, приложенную к телу в данной точке, можно перенести в любую точку, добавив пару сил.

На рисунке 27,б пара сил представлена дуговой стрелкой M в плоскости Π , на рисунке 27,в – векторным моментом \vec{M} , перпендикулярным плоскости.

3.3 Приведение к центру произвольной плоской системы сил

На тело действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k, \dots, \vec{F}_n$, лежащие в плоскости x, y (рисунок 28,а; показаны только силы \vec{F}_1, \vec{F}_2 и одна из промежуточных \vec{F}_k). Выберем в плоскости центр O и приведем к нему все заданные силы. Получим систему сил $\vec{F}_{Ok} = \vec{F}_k$, приложенных в центре, и систему пар (\vec{F}_k, \vec{F}'_k) в плоскости x, y , рисунок 28,б. Модуль момента k -ой пары равен $F_k \cdot h_k$.

Силы \vec{F}_{Ok} , приложенные в одной точке, можно складывать. В соответствии с аксиомой 4 складываем сначала две силы, к их равнодействующей прибавляем следующую силу и т.д. Сумма не изменится, если вместо сил $\vec{F}_{Ok} = \vec{F}_k$ складывать данные силы \vec{F}_k . В результате получим **главный вектор** системы сил, приложенный в центре O :

$$\vec{R}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k. \quad (16)$$

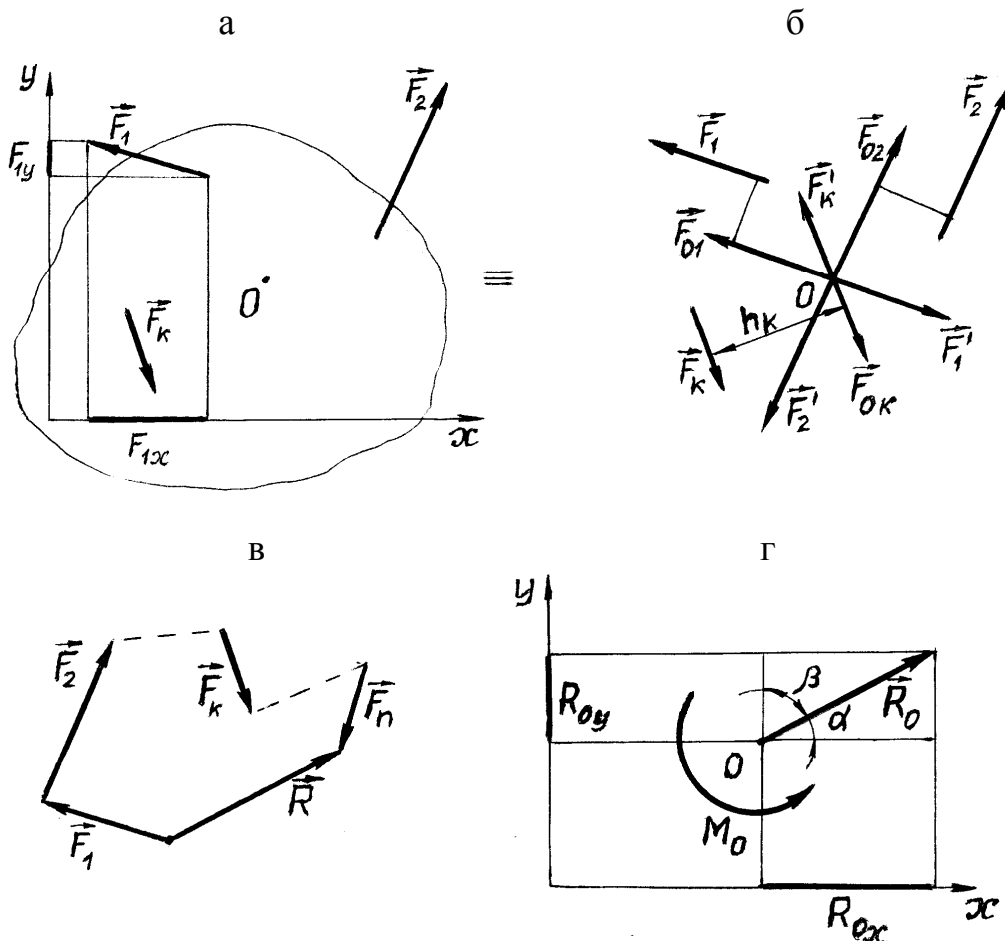


Рисунок 28 – Приведение произвольной плоской системы сил

При графическом определении главного вектора применяют правило силового многоугольника. Все векторы изображают в одном масштабе. Каждый прибавляемый вектор проводят из конца предыдущего. Результирующий вектор суммы проводят из начала первого вектора в конец последнего, рисунок 28,в. (На рисунке кроме сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_k$ изображена последняя сила \vec{F}_n). Штриховыми линиями показано, что между силами \vec{F}_2 и \vec{F}_k , а

также между силами \vec{F}_k и \vec{F}_n в многоугольнике последовательно должны быть построены все остальные силы.

При аналитическом решении равенство (16) выражают в проекциях на координатные оси и определяют проекции главного вектора, равные сумме проекций данных сил:

$$R_{Ox} = \sum F_{kx}, \quad R_{Oy} = \sum F_{ky}; \quad (17)$$

Тогда можно найти модуль вектора \vec{R}_O и направляющие косинусы:

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2}, \quad \cos \alpha = R_{Ox} / R_O, \quad \cos \beta = R_{Oy} / R_O.$$

Главный вектор \vec{R}_O прикладываем к телу в центре приведения O . На рисунке 28,а показаны проекции силы \vec{F}_1 , на рисунке 28,г – главный вектор \vec{R}_O , его проекции и углы α, β .

Сложим все пары (\vec{F}_k, \vec{F}'_k) , лежащие в плоскости x, y . Получим результирующую пару в этой же плоскости. Её момент можно определить как алгебраическую сумму моментов всех пар (см. (12)):

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M_k.$$

Момент k -ой пары равен моменту k -ой силы относительно центра O (см. пункт 3.2): $M_k = M_O(\vec{F}_k)$. Тогда момент M результирующей пары, равный сумме моментов всех сил относительно центра O , является **главным моментом** M_O данной системы относительно центра приведения, рисунок 28,г:

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}). \quad (18)$$

Таким образом, систему сил заменили **силой** – главным вектором, приложенным в центре приведения, и **парой сил**, представленной главным моментом. Главный вектор не зависит от перемены центра приведения (всегда равен сумме векторов всех сил). Главный момент зависит от выбора центра, так как относительно разных точек разные значения имеют плечи сил.

Существует разница между главным вектором и равнодействующей, которая, как и главный вектор, равна сумме всех сил. Равнодействующая – это сила, которая одна заменяет всю систему сил. В пункте 3.7 будет показано, что можно найти такой центр приведения, относительно которого главный момент равен нулю. Тогда главный вектор, приложенный в этом центре, будет являться равнодействующей.

3.4 Приведение произвольной пространственной системы сил

Так же, как для плоской системы, главный вектор пространственной системы сил равен сумме векторов всех сил (формула (14)). Силовой многоугольник рассматриваемой системы получается пространственным, поэтому при аналитическом определении **главного вектора** \vec{R}_O находят три проекции, рисунок 29:

$$R_{Ox} = \sum F_{kx}, \quad R_{Oy} = \sum F_{ky}, \quad R_{Oz} = \sum F_{kz}. \quad (19)$$

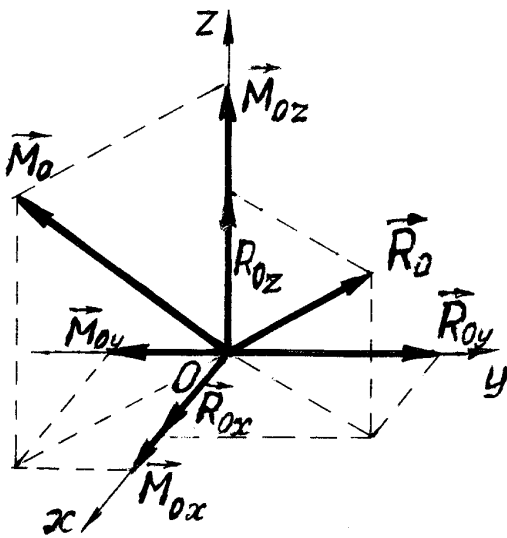


Рисунок 29 – Главный вектор и главный момент пространственной системы сил

Пары сил, полученные после приведения сил к центру O , лежат в пересекающихся плоскостях. Тогда, заменяя все пары одной результирующей парой, следует определять её векторный момент, равный сумме моментов-векторов всех пар:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_k.$$

Момент каждой k -ой пары равен векторному моменту силы \vec{F}_k относительно центра O : $\vec{M}_k = \vec{M}_O(\vec{F}_k)$. Поэтому сумма моментов является **главным моментом системы сил относительно центра приведения**:

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \sum (\vec{r}_k \times \vec{F}_k), \quad (20)$$

где \vec{r}_k – радиусы-векторы точек приложения сил относительно центра приведения O (см. п.2.3).

Проецируем равенство (20) на координатные оси и получаем проекции главного момента, равные сумме проекций моментов всех сил:

$$M_{Ox} = \sum M_{Ox}(\vec{F}_k), \quad M_{Oy} = \sum M_{Oy}(\vec{F}_k), \quad M_{Oz} = \sum M_{Oz}(\vec{F}_k).$$

В пункте 2.4 было показано, что проекция момента-вектора силы на ось, проходящую через центр момента, равна алгебраическому моменту силы относительно этой оси, например, $M_{Ox}(F_k) = M_x(F_k)$. Следовательно, если центр O совпадает с началом координат, то проекции вектора \vec{M}_O равны сумме моментов всех сил относительно осей:

$$M_{Ox} = \sum M_x(\vec{F}_k), \quad M_{Oy} = \sum M_y(\vec{F}_k), \quad M_{Oz} = \sum M_z(\vec{F}_k). \quad (21)$$

Определив проекции, можно построить составляющие $\vec{M}_{Ox}, \vec{M}_{Oy}, \vec{M}_{Oz}$, а затем главный момент \vec{M}_O , рисунок 29. Момент \vec{M}_O направлен перпендикулярно плоскости результирующей пары (на рисунке пара не показана) в ту сторону, откуда поворот пары виден против хода часовой стрелки.

3.5 Приведение системы сходящихся сил и системы параллельных сил

3.5.1 Пусть линии действия всех сил пересекаются в точке O , рисунок 30,а. Выберем точку O за центр приведения и перенесем в неё все силы по линиям их действия, рисунок 30,б, (см. Следствие аксиомы 5).

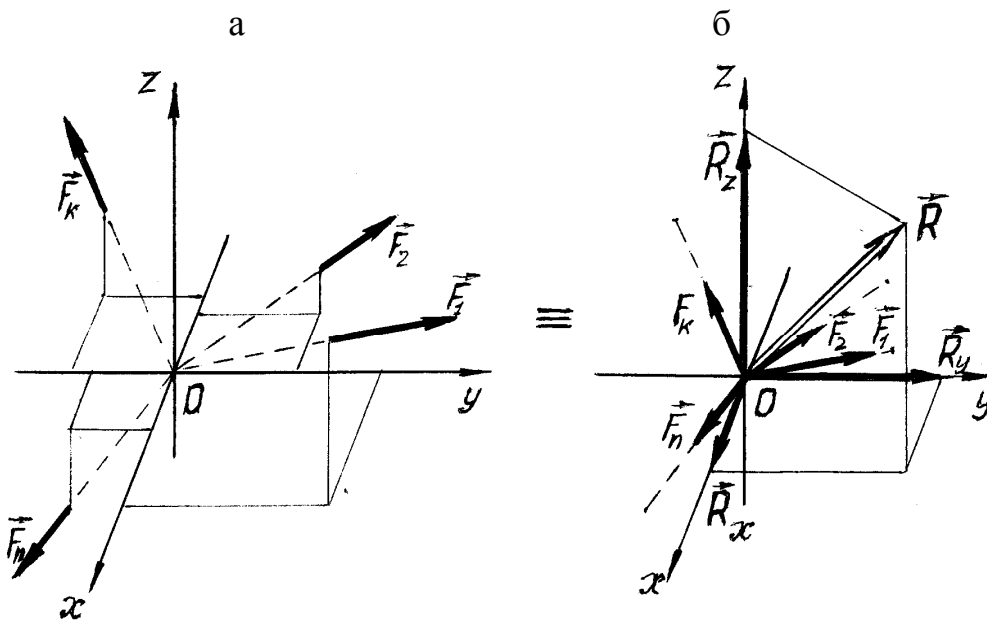


Рисунок 30 – Равнодействующая системы сходящихся сил

Дополнительные пары в этом случае отсутствуют, так как плечи сил относительно точки O равны нулю: $\vec{M}_k = \vec{M}_O(\vec{F}_k) = 0$. Таким образом, **главный момент системы сходящихся сил относительно точки схода сил равен нулю:** $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k) \equiv 0$.

Силы, приложенные в центре O , складываем и получаем **главный вектор**, приложенный в этом центре:

$$\vec{R}_O = \sum \vec{F}_k. \quad (22)$$

Главный вектор один заменяет всю данную систему, следовательно, **система сходящихся сил приводится к равнодействующей $\vec{R} = \vec{R}_O$, приложенной в точке схода сил.**

Спроецируем равенство (22) на координатные оси и найдем проекции равнодействующей. Для пространственной системы сил

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}. \quad (23)$$

Если **сходящиеся силы расположены в одной плоскости** (например, xOy), то равнодействующую можно определить проекциями на две оси, так как $\sum F_{kz} \equiv 0$:

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}. \quad (24)$$

3.5.2 Рассмотрим пространственную систему параллельных сил, рисунок 31,а. Из центра приведения O направим ось Oz параллельно силам. Тогда проекции **главного вектора** на оси x и y будут тождественно равны нулю: $R_{Ox} \equiv 0, R_{Oy} \equiv 0$. Проекция на ось z

$$R_{Oz} = \sum F_{kz}. \quad (25)$$

Следовательно, **главный вектор \vec{R}_O направлен параллельно силам**. Приложим его в центре приведения, рисунок 31,б, предполагая, что $R_{Oz} > 0$.

Определим **главный момент**. Его проекция на ось Oz равна нулю, так как все силы параллельны этой оси: (см. п. 2.2). Тогда

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum M_x(\vec{F}_k), \\ M_{Oy} &= \sum M_y(\vec{F}_k). \end{aligned} \quad (26)$$

Главный момент лежит в плоскости xOy , рисунок 31,б.

Таким образом, в результате приведения пространственной системы параллельных сил к произвольному центру, получим, в общем случае, **главный вектор**

параллельный силам, и главный момент, перпендикулярный главному вектору.

Если **параллельные силы расположены в одной плоскости** (например, xOy) и ось Oy направлена параллельно силам, то их проекции на оси Ox и Oz равны нулю. Тогда **главный вектор** направлен вдоль оси Oy , его проекция на эту ось равна

$$R_{Oy} = \sum F_{ky}. \quad (27)$$

Для плоской системы сил достаточно определить алгебраическое значение **главного момента** относительно центра O , взятого в плоскости сил:

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}). \quad (28)$$

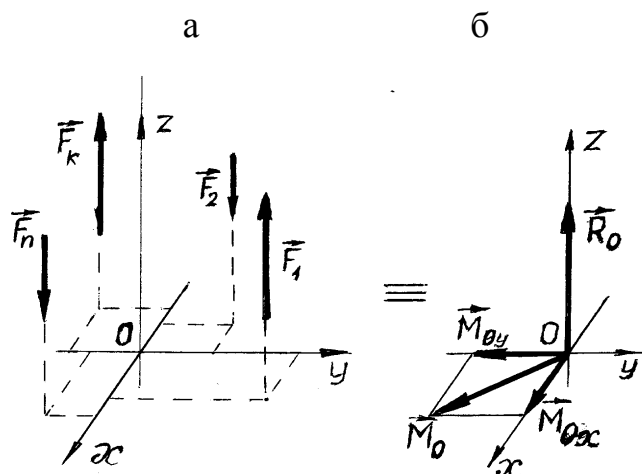


Рисунок 31 – Главный вектор и главный момент параллельных сил

3.6 Уравнения равновесия систем сил. Статически определенные задачи

Таким образом, в результате приведения системы сил к центру в общем случае она становится эквивалентна главному вектору и главному моменту. Отсюда следует **условие равновесия**: *если главный вектор и главный момент данной системы сил равны нулю, то эта система сил уравновешена.*

Если векторы \vec{R}_O и \vec{M}_O равны нулю, то их проекции на оси координат также равны нулю. Тогда для **произвольной пространственной системы сил** из формул (19), (21) получим

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0; \\ \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

т.е. произвольная пространственная система сил уравновешена, если суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы моментов всех сил относительно этих осей равны нулю.

Когда все силы, приложенные к телу, заданы, то выполнение равенств (27) означает, что тело сохраняет состояние равновесия. Однако в статике чаще решается обратная задача, когда заранее известно, что тело находится в равновесии, но часть сил, действующих на тело, неизвестна. Тогда равенства (27) представляют собой **уравнения равновесия** произвольной пространственной системы сил, из которых определяют неизвестные (обычно – это реакции связей).

Для **произвольной плоской системы сил** из формул (17), (18) получаем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}) = 0, \quad (28)$$

т.е. суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма моментов сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил, равны нулю.

В соответствии с пунктом 3.5 по три уравнения равновесия можно составить для **пространственной системы сходящихся сил** (из формул (23)):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0; \quad (29)$$

для **пространственной системы параллельных сил** (ось z параллельна силам, равенства (25), (26)):

$$\sum F_{kz} = 0, \quad \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0. \quad (30)$$

По два уравнения равновесия получаем для **плоской системы сходящихся сил** (см. (24)):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0 \quad (31)$$

и для **плоской системы параллельных сил** (ось y параллельна силам, формулы (27), (28)):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}) = 0. \quad (32)$$

Для произвольной плоской системы сил кроме **основного (первого) варианта** уравнений равновесия (28) иногда удобно использовать ещё два варианта, выполняя дополнительные условия.

Второй вариант. Суммы моментов всех сил относительно любых двух точек A и B и сумма проекций сил на ось Ox , не перпендикулярную прямой, проходящей через точки A и B , равны нулю:

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum F_{kx} = 0. \quad (33)$$

Третий вариант. Суммы моментов всех сил относительно любых трёх точек, не лежащих на одной прямой, равны нулю:

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_C(\vec{F}_k) = 0. \quad (34)$$

Системы уравнений равновесия, полученные для каждой из рассмотренных систем сил, являются *необходимыми* и *достаточными*. Необходимость их выполнения очевидна, – иначе данная система сил будет неуравновешенна. В учебниках [1, 2] смотрите доказательство их достаточности, т.е. возможности утверждать, что если все уравнения выполняются, то система сил обязательно уравновешена.

Термин «*достаточность*» для уравнений равновесия означает также, что составлять дополнительные уравнения сверх того числа, которое получено в этом параграфе для каждой данной системы сил, не имеет смысла. Каждое «лишнее» уравнение будет являться следствием остальных и не обеспечит решение задачи, если число неизвестных величин оказалось больше числа *достаточных* уравнений.

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, называются *статически определёнными*, а конструкции, для которых это имеет место – *статически определимыми*. Статическая неопределимость возникает в тех случаях, когда сверх минимального числа связей, необходимых для равновесия, на конструкцию накладываются дополнительные связи.

Расчет статически неопределимых конструкций проводится в курсе сопротивления материалов. При этом учитывается деформация тел. Сравнительный анализ по результатам расчетов позволяет решить вопрос о целесообразности применения статически неопределимых конструкций вместо определимых.

3.7 Приведение неуравновешенных систем сил к простейшему виду

К простейшему виду сразу же приводятся неуравновешенные системы двух типов:

- **системы сходящихся сил** приводятся к **одной силе** – равнодействующей, приложенной в точке схода сил;
- **системы пар** приводятся к **одной паре**, момент которой равен сумме моментов всех пар системы. Напомним, что пару сил нельзя заменить одной силой. Пара является простейшей системой сил.

Произвольные плоские, произвольные пространственные системы и системы параллельных сил в общем случае эквивалентны силе и паре сил. Сила равна главному вектору системы, приложенному в центре приведения, а **момент пары сил** является главным моментом системы сил относительно центра приведения.

Для этих систем сил может встретиться два частных случая, когда они сразу приводятся к простейшему виду:

- 1 – главный вектор равен нулю, а главный момент не равен нулю. Это означает, что система эквивалентна **одной паре сил**;
- 2 – главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю. Тогда система эквивалентна **одной силе**, линия действия которой проходит через центр приведения.

3.7.1 Рассмотрим **произвольную плоскую систему сил**, когда ни главный вектор \vec{R}_O , ни главный момент M_O не равны нулю. На рисунке 32,а, момент M_O изображен дуговой стрелкой.

Представим главный момент в виде пары сил (\vec{R}', \vec{R}) , равных по модулю главному вектору \vec{R}_O (рисунок 32,б). Плечо пары $h = M_O/R = M_O/R_O$. Расположим пару так, чтобы сила \vec{R}' была направлена противоположно главному вектору по линии его действия, а силу \vec{R} проведем на расстоянии h от этой линии, учитывая направление поворота момента. Отбросим уравновешенные силы \vec{R}' и \vec{R}_O . Останется **одна сила** \vec{R} , равная \vec{R}_O , рисунок 32,в.

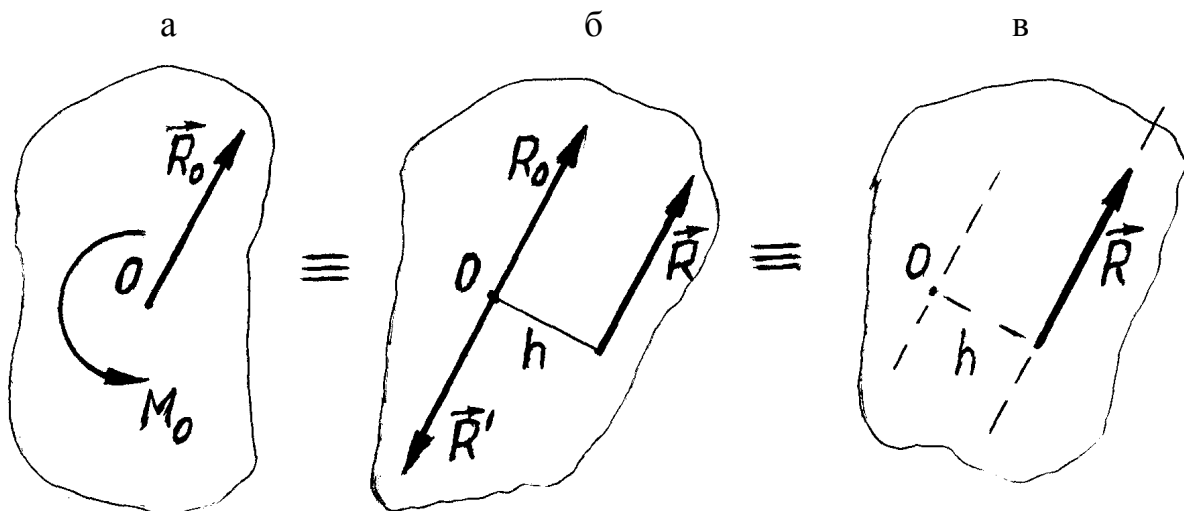


Рисунок 32 – Приведение плоской системы сил к равнодействующей

Таким образом, **произвольная плоская система сил в общем случае приводится к одной силе – равнодействующей \vec{R}** , равной главному вектору, но приложенной в стороне от центра приведения.

3.7.2 Аналогичным образом можно преобразовать главный вектор и главный момент **системы параллельных сил**. На рисунке 33 это показано для пространственной системы параллельных сил. Ось Oz параллельна данным силам.

В результате приведения к произвольному центру векторы \vec{M}_O и \vec{R}_O такой системы взаимноперпендикулярны, рисунок 33,а (см. пункт 3.5.2).

Представим главный момент в виде пары сил (\vec{R}', \vec{R}) , равных по модулю главному вектору. Плоскость пары, перпендикулярную моменту-вектору \vec{M}_O , расположим так, чтобы линия действия главного вектора \vec{R}_O принадлежала этой плоскости. Силу \vec{R}' приложим в центре O противоположно главному вектору, рисунок 33,б. Уравновешенные силы \vec{R}' и \vec{R}_O отбросим; получим **равнодействующую \vec{R}** , рисунок 33,в, линия действия которой расположена на расстоянии $h = M_O/R = M_O/R_O$ от линии действия главного вектора.

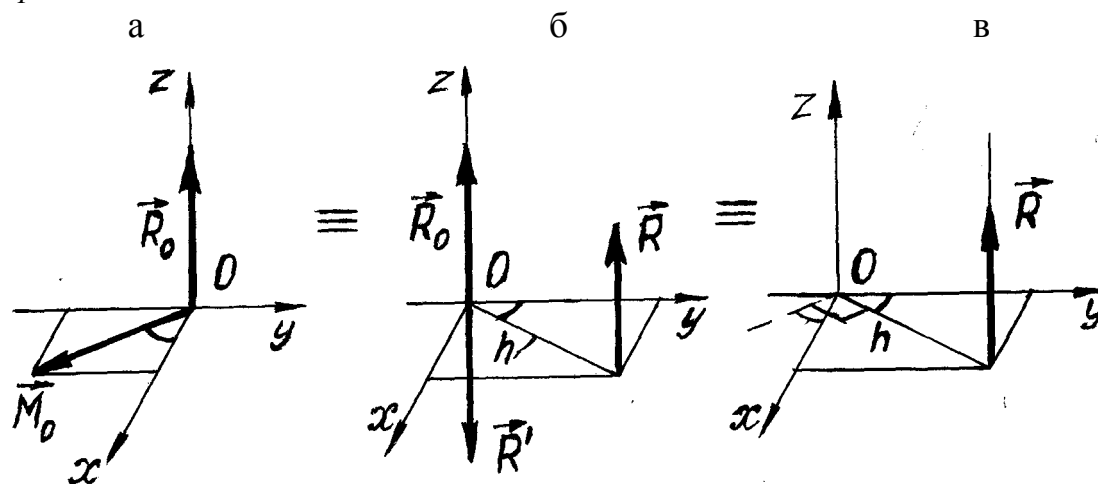


Рисунок 33 – Приведение к равнодействующей системы параллельных сил

Результаты, полученные в подпунктах 3.7.1 и 3.7.2, показывают: если главные векторы произвольной плоской системы сил и системы параллельных сил не равны нулю, то эти системы приводятся к одной силе – равнодействующей (при любом значении главного момента).

3.7.3 Если в результате приведения к произвольному центру не равны нулю главный вектор и главный момент **произвольной пространственной системы сил**, то могут встретиться три случая.

Случай 1. Векторы \vec{M}_O и \vec{R}_O взаимноперпендикулярны. Такое же расположение векторов получается для системы параллельных сил (рисунок 33). Следовательно, в этом случае система приводится к одной силе.

Случай 2. Векторы \vec{M}_O и \vec{R}_O параллельны, рисунок 34,а. Момент \vec{M}_O можно представить некоторой парой сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) , лежащей в плоскости, перпендикулярной \vec{R}_O , рисунок 34,б.

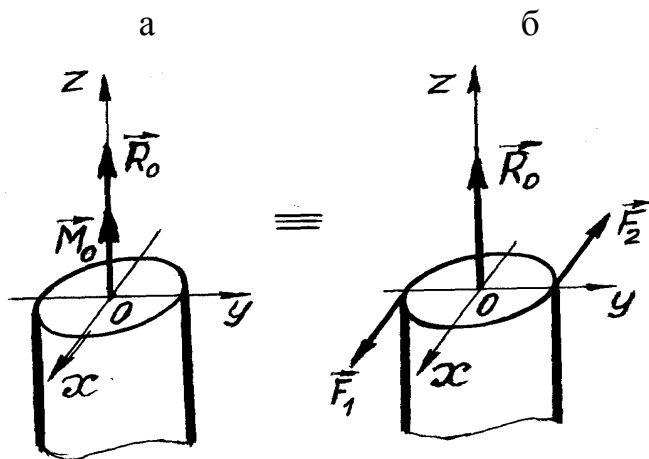


Рисунок 34 – Динамический винт

Такая совокупность силы и пары сил называется **динамическим винтом** или **динамой**. Линия, вдоль которой направлены векторы \vec{M}_O и \vec{R}_O называется **осью динамы** (на рисунке это ось Oz). На рисунке показан правый динамический винт. Если векторы \vec{M}_O и \vec{R}_O направлены по оси динамы в противоположные стороны, то они образуют левый винт.

Случай 3. Векторы \vec{M}_O и \vec{R}_O не перпендикулярны друг другу и не параллельны. Разложим момент \vec{M}_O на два составляющих вектора, рисунок 35,а: момент \vec{M}' направим по линии действия главного вектора \vec{R}_O , момент \vec{M}'' – перпендикулярно \vec{R}_O . Момент \vec{M}'' представим виде пары сил ($\vec{R}' = \vec{R}_O$, $\vec{R}'' = -\vec{R}_O$), приложив силу \vec{R}'' в центре приведения O , рисунок 35,б. Уравновешенные силы \vec{R}'' и \vec{R}_O отбросим. Момент \vec{M}' является свободным вектором (см. пункт 2.6); перенесем его в точку O' , где приложена сила \vec{R}' , рисунок 35,в. В результате получим **динаму**, ось которой проходит через точку O' в стороне от центра приведения.

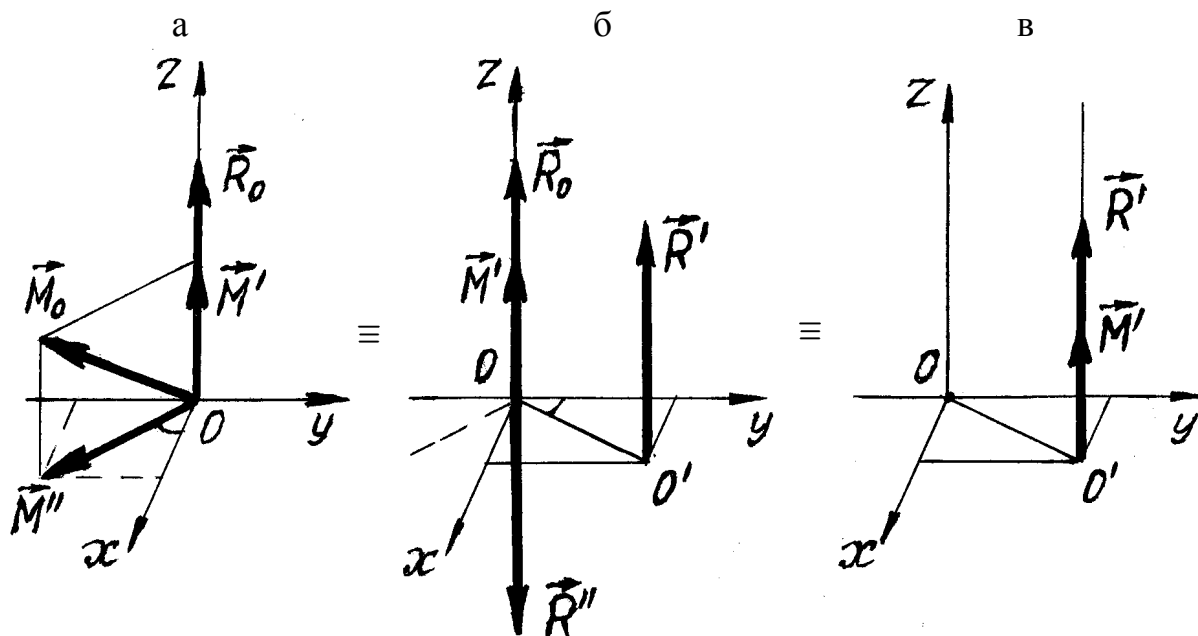


Рисунок 35 – Приведение к динаме в общем случае

Динаму нельзя заменить ни одной силой, ни одной парой сил. Следовательно, динама представляет собой третий случай простейшей неуравновешенной системы сил. Ось динамы называют также **центральной осью системы сил**.

4 РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИЛЫ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

4.1 Равнодействующая распределенных сил

В некоторых случаях нельзя принимать допущение, что два тела взаимодействуют друг с другом в одной точке. Тогда вместо сил *сосредоточенных* (приложенных в точке) рассматривают *распределенные силы*. Например, силы взаимодействия тяжёлого цилиндра и плоской опорной поверхности другого тела *распределены по линии*. На твердое тело, погруженное в жидкость, действуют силы, *распределенные по поверхности* тела. Силы тяжести материальных частиц тела *распределены по объёму*.

Рассмотрим параллельные силы, распределенные вдоль отрезка AB длиной l , рисунок 36. Разобьем отрезок на n участков достаточно малой одинаковой длины Δx .

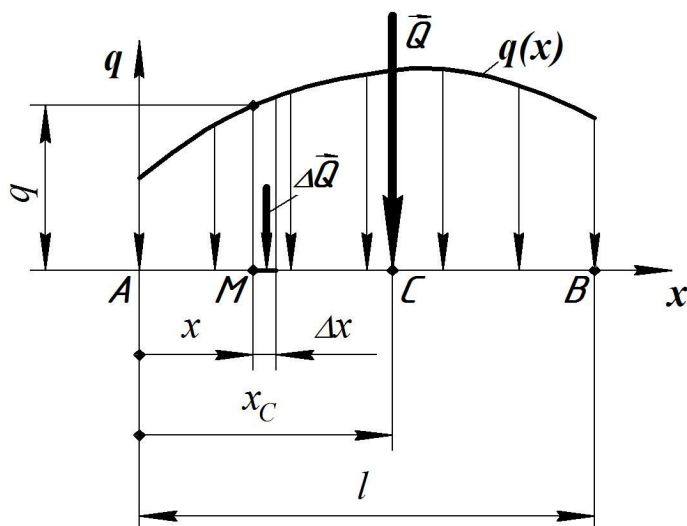


Рисунок 36 – Силы, распределенные по линии

Действие распределённых сил на каждом i -том участке можно представить малой сосредоточенной силой ΔQ_i . Отношение величины ΔQ_i к длине Δx называют *средней интенсивностью распределённых сил на i -том участке*:

$$q_i = \frac{\Delta Q_i}{\Delta x}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{а})$$

Параллельные силы ΔQ_i , направленные в одну сторону, имеют равнодействующую того же направления. Сложив модули всех сил $\Delta Q_i = q_i \cdot \Delta x$, найдём модуль равнодействующей распределённых сил:

$$Q \cong \sum_{i=1}^n \Delta Q_i = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \Delta x. \quad (\text{б})$$

Так как в общем случае точные значения средних интенсивностей q_i на участках неизвестны, то величина Q , вычисленная по формуле (б), окажется приближенной.

Если длину участков Δx приближать к нулю, то на отрезке AB получим множество участков ($n \rightarrow \infty$) бесконечно малой длины dx . К каждому

участку приложена элементарная сила $d\vec{Q}$. Тогда предел отношения в формуле (а) определит *интенсивность распределённых сил в точке M*:

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_i}{\Delta x} = \frac{dQ}{dx}. \quad (35)$$

Таким образом, интенсивность q в точке, координата которой равна x , — это предельное значение средней интенсивности q_i на прилегающем участке, длина которого Δx стремится к нулю.

Закон изменения интенсивности $q = q(x)$ в зависимости от текущего значения x задают, исходя из условий задачи и принятых допущений. Например, форма кривой $q(x)$ на рисунке 36 может быть выбрана при контакте упругих тел: на краях отрезка AB давление вследствие деформации будет меньше, чем в средней части.

Интенсивность сил, распределённых по линии, по поверхности, по объёму, измеряется, соответственно, в единицах H/i , H/i^2 , H/i^3 .

Точное значение модуля равнодействующей определим как предел суммы в формуле (б):

$$Q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n q_i \cdot \Delta x = \int_0^l q(x) \cdot dx, \quad (36)$$

т.е. равнодействующая \vec{Q} — это сумма бесконечно большого числа бесконечно малых параллельных сил $d\vec{Q} = \vec{q}(x) \cdot dx$, распределённых вдоль отрезка AB .

Точку приложения равнодействующей C найдем с помощью теоремы Вариньона:

$$M_A(\vec{Q}) = \int_0^l M_A(d\vec{Q}) \quad \text{или} \quad -x_C \cdot Q = -\int_0^l x \cdot dQ.$$

Подставив значение $dQ = q(x) \cdot dx$, получим

$$x_C = \frac{\int_0^l x \cdot q(x) \cdot dx}{Q} = \frac{\int_0^l x \cdot q(x) \cdot dx}{\int_0^l q(x) \cdot dx}. \quad (37)$$

Рассмотрим два простейших случая определения равнодействующей.

1. Силы **распределены равномерно** по длине l отрезка прямой, т.е. $q(x)=q=const$, рисунок 37,а. Тогда по формулам (36) и (37) получаем очевидный результат

$$Q = q \cdot l, \quad x_c = \frac{q \cdot l^2 / 2}{ql} = \frac{l}{2}. \quad (38)$$

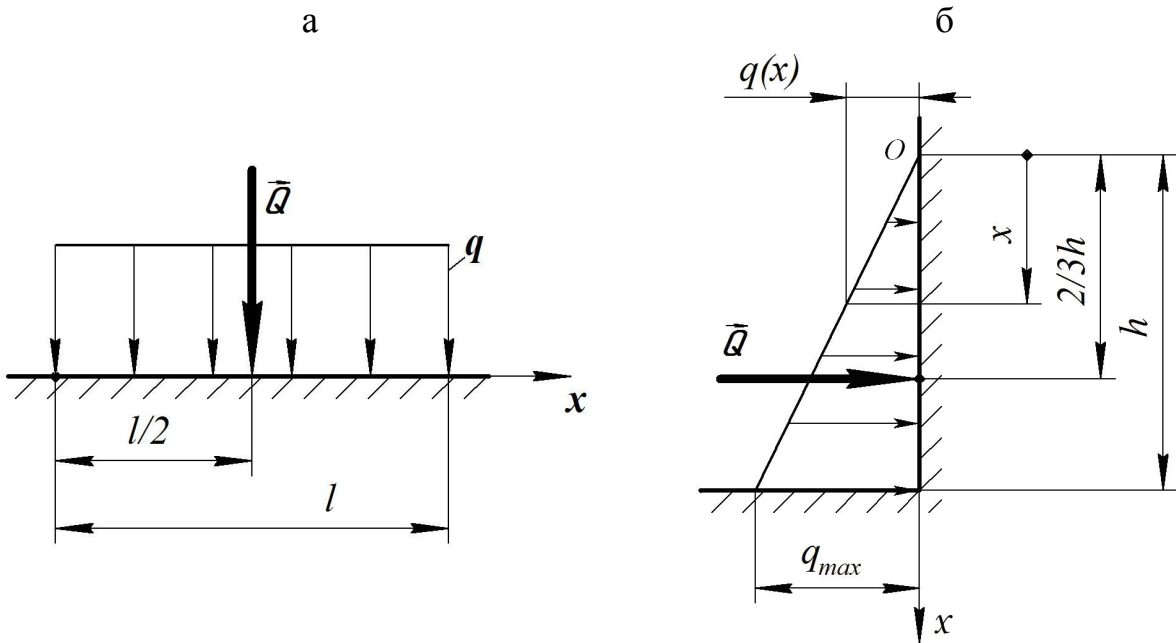


Рисунок 37 – Равнодействующие сил, распределенных равномерно (а), и по линейному закону (б)

2. Давление жидкости на вертикальную стенку **распределено по линейному закону**, рисунок 37,б. Зная давление на глубине h , $q(h) = q_{max}$, из подобия треугольников с катетами, равными x и h , найдем давление на глубине x :

$$q(x) = q_{max} \cdot \frac{x}{h}.$$

По формулам (36), (37), интегрируя в пределах от нуля до h , определим

$$Q = 0,5 q_{max} \cdot h, \quad x_c = \frac{\frac{q_{max}}{h} \int_0^h x^2 \cdot dx}{0,5 q_{max} \cdot h} = \frac{2}{3} h. \quad (39)$$

4.2 Реакция жесткой заделки

Жесткой заделкой называется такая связь, которая исключает любые перемещения рассматриваемого тела относительно тела, осуществляющего связь.

На рисунке 38,а показана балка, замурованная в стену. Мысленно проведем сечение $C-C$ и рассмотрим свободную часть балки AB , рисунок 38,б. На неё кроме заданных сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 и т.д. действует система элементарных рас-

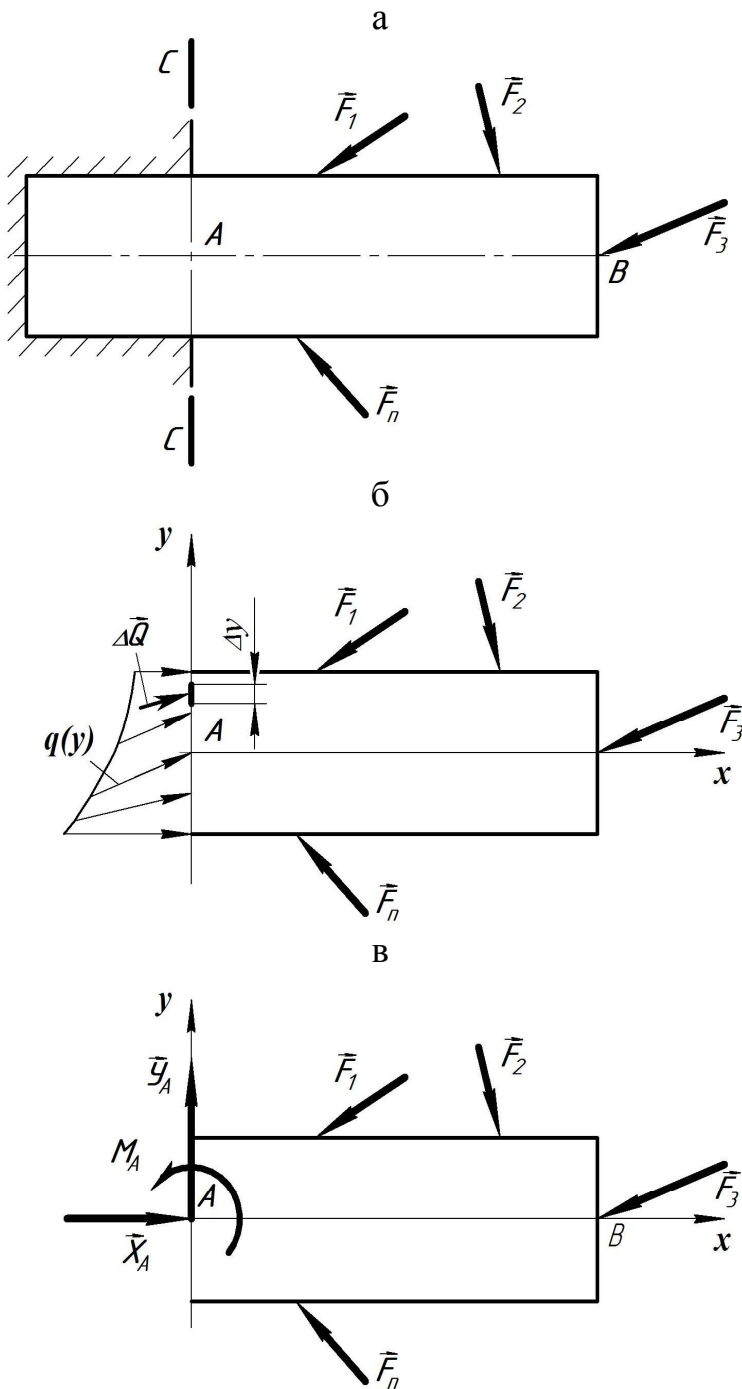


Рисунок 38 – Реакция жесткой заделки

пределенных сил $d\vec{Q}$ со стороны замурованной части. Закон изменения интенсивности $q(y)$ этих сил в общем случае имеет сложный характер. От точки к точке по сечению меняется не только величина, но и направление действия. На рисунке 38,б показана одна из малых сил $\Delta\vec{Q}$, приложенная на участке Δy .

Если заданные силы образуют плоскую систему (как на рисунке), то система распределённых сил также является плоской. Множество элементарных сил $d\vec{Q}$, приложенных во всех точках сечения $C-C$, приведем в центр A , получим их главный вектор \vec{R}_A и главный момент M_A . Главный вектор разложим на составляющие \vec{X}_A, \vec{Y}_A , рисунок 38,в.

Таким образом, если заданные силы образуют плоскую систему сил, то реакцию жесткой заделки представляют в виде **трех силовых факторов**:

$$\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A.$$

Силы \vec{X}_A, \vec{Y}_A показывают, что заделка препятствует перемещению точки A в плоскости xAy ; момент M_A реактивной пары сил запрещает поворот тела вокруг точки A . Неизвестные проекции главного вектора X_A, Y_A и момент M_A реакции жесткой заделки определяют из трёх уравнений равновесия всех сил, приложенных к свободной части балки AB .

Если на балку действует произвольная пространственная система сил, то для нахождения реакции жесткой заделки составляют шесть уравнений равновесия, из которых определяют X_A, Y_A, Z_A – проекции главного вектора, M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az} – проекции главного момента, равные суммам моментов распределенных сил $d\vec{Q}$ относительно осей.

Распределённые силы $d\vec{Q}$ являются внутренними силами для балки в сечении C . Определив их главный вектор и главный момент, в курсе сопротивления материалов из условий прочности находят поперечные размеры балки в этом сечении.

4.3 Сила тяжести. Центр тяжести

На каждую частицу тела действует сила тяжести, направленная вниз по вертикали, проходящей через эту частицу. В технических устройствах размеры тел значительно меньше размеров земли, поэтому силы тяжести всех частиц $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ можно считать параллельными друг другу, рисунок 39. Равнодействующая сил тяжести всех частиц является *силой тяжести тела*. Её модуль

$$P = \sum p_i . \quad (a)$$

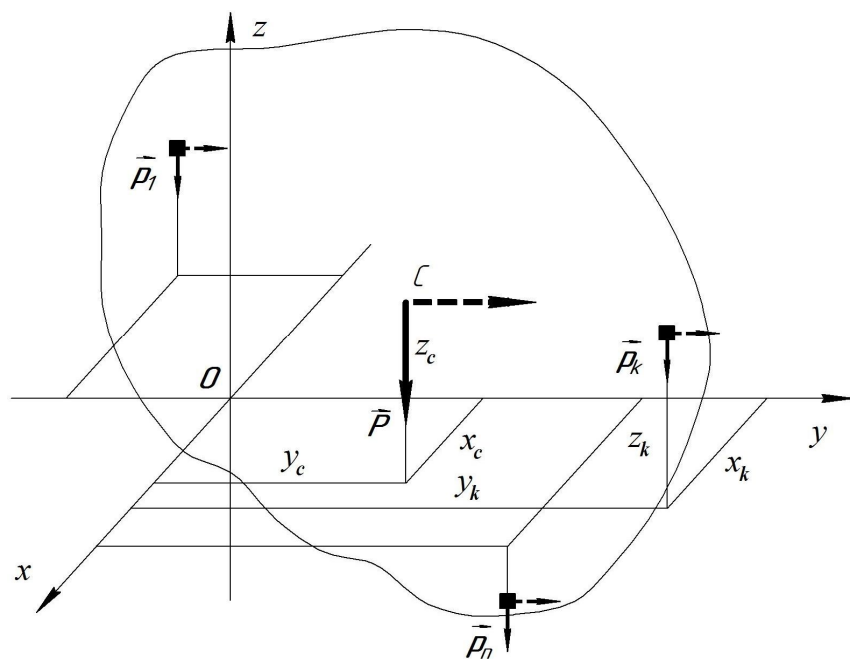


Рисунок 39 – Сила тяжести тела P

Жестко соединим с телом систему координат $Oxyz$, направим ось Oz по вертикали вверх параллельно силам тяжести. Затем повернем тело вместе с осями $Oxyz$ вокруг оси Ox так, чтобы ось Oy была направлена по вертикали к земле. (В этом случае на рисунке 39 надо представить, что земля расположена справа от тела.) Силы тяжести p_i частиц также

повернутся относительно тела вокруг точек приложения и будут направлены параллельно оси Oy . Векторы сил после поворота изображены штриховыми линиями.

В учебниках теоретической механики [1,2] доказано следующее свойство: если параллельные силы одновременно повернуть вокруг их точек приложения на один и тот же угол в одном и том же направлении, то равнодействующая этих сил повернется на тот же угол. Причем поворот равнодействующей произойдет вокруг некоторой фиксированной точки, которая называется центром параллельных сил.

Таким образом, поле параллельных сил тяжести p_i имеет особую точку, связанную с телом, – *центр тяжести* C , в котором приложена сила тяжести тела.

Положение центра тяжести найдем, применив теорему Вариньона о моменте равнодействующей. Рассмотрим случай, когда силы p_i параллельны оси Oz и приравняем моменты равнодействующей \vec{P} и суммы моментов сил p_i относительно осей Ox и Oy :

$$\begin{aligned} -P \cdot y_C &= \sum(-p_i \cdot y_i), \\ P \cdot x_C &= \sum(p_i \cdot x_i). \end{aligned} \tag{б}$$

Запишем равенство моментов относительно оси Ox после поворота тела, когда силы p_i и \vec{P} параллельны оси Oy :

$$-P \cdot z_C = \sum(-p_i \cdot z_i). \tag{в}$$

Из равенств (б), (в) получаем

$$x_C = \frac{\sum(p_i \cdot x_i)}{P}, \quad y_C = \frac{\sum(p_i \cdot y_i)}{P}, \quad z_C = \frac{\sum(p_i \cdot z_i)}{P}. \tag{40}$$

Здесь сила тяжести тела $P = \sum p_i$.

4.4 Центр тяжести однородных тел

Тело называется однородным, если отношение силы тяжести p_i любой его части к объёму этой части v_i равно отношению силы тяжести P всего тела к его объёму V :

$$\frac{p_i}{v_i} = \frac{P}{V} = \gamma, \tag{а}$$

где γ , Н/м^3 – это интенсивность равномерно распределенных сил тяжести частиц, или – сила тяжести единицы объёма однородного тела. Величину γ называют также удельным весом.

Из формулы (а) выразим $p_i = \gamma \cdot v_i$, $P = \gamma \cdot V$, подставим в формулы (40) и сократим на γ . Учитывая, что $V = \sum v_i$ получим **координаты центра тяжести однородного объёма**

$$x_c = \frac{\sum (v_i \cdot x_i)}{\sum v_i}, \quad y_c = \frac{\sum (v_i \cdot y_i)}{\sum v_i}, \quad z_c = \frac{\sum (v_i \cdot z_i)}{\sum v_i}. \quad (41)$$

Если тело имеет постоянную достаточно малую толщину и изготовлено из одного материала, его можно считать однородной тяжелой поверхностью. Величину γ в этом случае представим как вес единицы площади, т.е. $p_i = \gamma_s \cdot s_i$, $P = \gamma_s \cdot S = \gamma_s \cdot \sum s_i$. Тогда из формулы (40) определим **координаты центра тяжести однородной поверхности**

$$x_N = \frac{\sum (s_i \cdot x_i)}{\sum s_i}, \quad y_c = \frac{\sum (s_i \cdot y_i)}{\sum s_i}, \quad z_c = \frac{\sum (s_i \cdot z_i)}{\sum s_i}, \quad (42)$$

где s_i – площади участков поверхности.

Аналогично для **однородной линии**, определяя γ как вес единицы длины (погонный вес), получаем

$$x_c = \frac{\sum (l_i \cdot x_i)}{\sum l_i}, \quad y_c = \frac{\sum (l_i \cdot y_i)}{\sum l_i}, \quad z_c = \frac{\sum (l_i \cdot z_i)}{\sum l_i}. \quad (43)$$

Здесь l_i – длины участков тяжелой линии.

Формулы (41)...(43) удобны тем, что для тел одинаковой конфигурации положение центра тяжести можно найти независимо от того, из какого материала изготовлены тела.

4.5 Способы определения координат центров тяжести тел

1. Симметрия. Если *однородное тело* имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести тела лежит соответственно в этой плоскости, на оси или в центре симметрии. Это свойство следует из простых рассуждений, смотрите [1].

Следовательно центр тяжести круглого прямого конуса лежит на оси его симметрии, центры тяжести круглого кольца, круглой или прямоугольной пластины находятся в геометрическом центре (центре симметрии), если эти тела являются однородными.

2. Разбиение на части. Способ применяется в случае, когда тело можно разбить на части, для каждой из которых положения центров тяжести известны.

Для однородных тел центр тяжести находят по формулам (41)...(43). Если заданы силы тяжести частей – по формуле (40), учитывая, что $P = \sum p_i$.

3. Интегрирование. Способ применяют, когда тело нельзя разбить на конечное число частей, для которых известны положения центров тяжести. Тело разбивают на множество элементарных участков, устремляя к нулю все объёмы v_i , площади s_i или длины l_i и обозначая их, соответственно, dv , ds , dl . Когда число участков стремится к бесконечности, пределы сумм в формулах (41)...(43) будут выражаться определёнными интегралами по всему объёму, по площади поверхности или по длине линии.

4. Способ «отрицательных сил тяжести» применяется для тел, которые имеют вырезы (полости, отверстия, выемки). Способ является особым случаем способа разбиения на части.

Пусть, например, тело имеет вырез. Мысленно заполним его тем же веществом, что и данное тело, и представим, что оно (данное тело) состоит из двух условных частей:

- 1 – «заполненное тело» (данное тело + заполненный вырез);
- 2 – вырез, заполненный веществом.

Чтобы получить данное тело, вырез *удаляют*. Поэтому, определяя координаты центра тяжести C данного тела, значения силы тяжести p_2 , или объёма v_2 , или площади s_2 , или длины l_2 вырезаемой части 2 подставляют в формулы (40)...(43) *со знаком минус*.

Тогда для данного однородного тела, в объёме которого имеется вырез, по формуле (41) определим, например, координату x_C :

$$x_C = \frac{v_1 \cdot x_1 - v_2 \cdot x_2}{v_1 - v_2},$$

где v_1 – общий объём тела и выреза, v_2 – объём выреза. Из формулы видно, что центр тяжести однородного объёма можно найти, если заданы (легко определяются) координаты центров тяжести «заполненного» тела 1 и выреза 2, а также их объёмы.

5. Экспериментальный способ. Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации можно определять экспериментально. Подвешивают, например, тело на нити (тросе) за различные его точки. Нить каждый раз будет располагаться по линии действия силы тяжести. Точка пересечения этих линий определяет положение центра тяжести тела.

Смотрите также в учебнике [1] схему стенда для экспериментального определения центра тяжести самолета методом взвешивания.

4.6 Примеры на определение положения центра тяжести

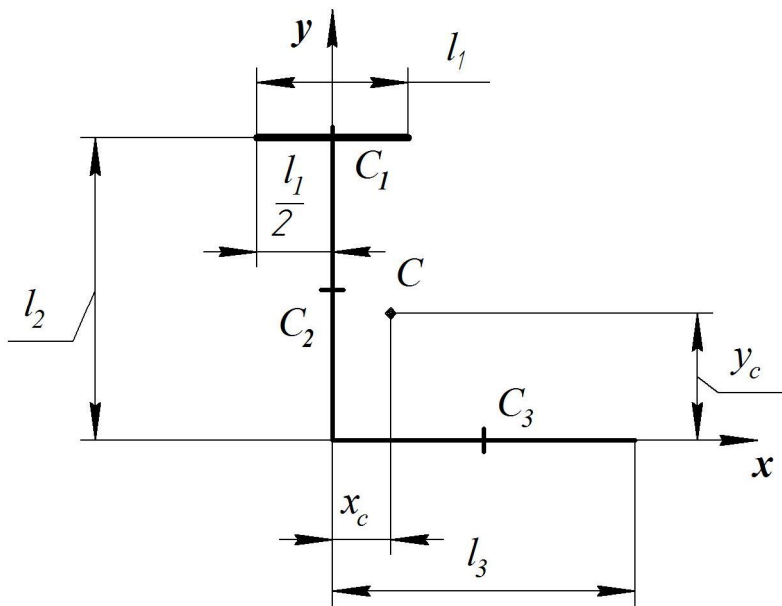


Рисунок 40 – Пример1. Способ разбиения на части

Пример1. Сварную конструкцию на рисунке 40 мысленно разобьем на три части, каждая из которых представляет собой прямолинейный тонкий стержень. Центры тяжести стержней C_1, C_2, C_3 лежат в центрах их симметрии. Заданы размеры $l_1 = 0,2\text{м}, l_2 = l_3 = 0,4\text{м}$.

Выберем удобные оси так, чтобы координаты x_{C1}, x_{C2}, y_{C3} были равны нулю. Остальные координаты центров тяжести

стержней легко определяются по заданным размерам. Положение центра тяжести C данного тела определим по формулам (43):

$$x_C = \frac{l_1 \cdot x_{C1} + l_2 \cdot x_{C2} + l_3 \cdot x_{C3}}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{0,4 \cdot (0,5 \cdot 0,4)}{0,2 + 0,4 + 0,4} = 0,08\text{м} ,$$

$$y_C = \frac{l_1 \cdot y_{C1} + l_2 \cdot y_{C2} + l_3 \cdot y_{C3}}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2}{0,2 + 0,4 + 0,4} = 0,16\text{м} .$$

Координата $z_C = 0$, так как все стержни лежат в одной плоскости.

Пример 2. Центр тяжести C тонкой пластины на рисунке 41 лежит на оси её симметрии Oy , следовательно координата x_C равна нулю.

Боковые кромки пластины очерчены по параболе $y = x^2/2p$, где p – параметр параболы. Верхняя кромка проходит по хорде параболы, перпендикулярной оси Oy , на расстоянии H от оси Ox .

Разобьём пластину на множество полосок параллельных оси Ox . Бесконечно малая ширина каждой полоски dy . Положение каждой последовательно взятой полоски и её центр тяжести определяются текущей координатой y . Длина каждой полоски равна $2x$.

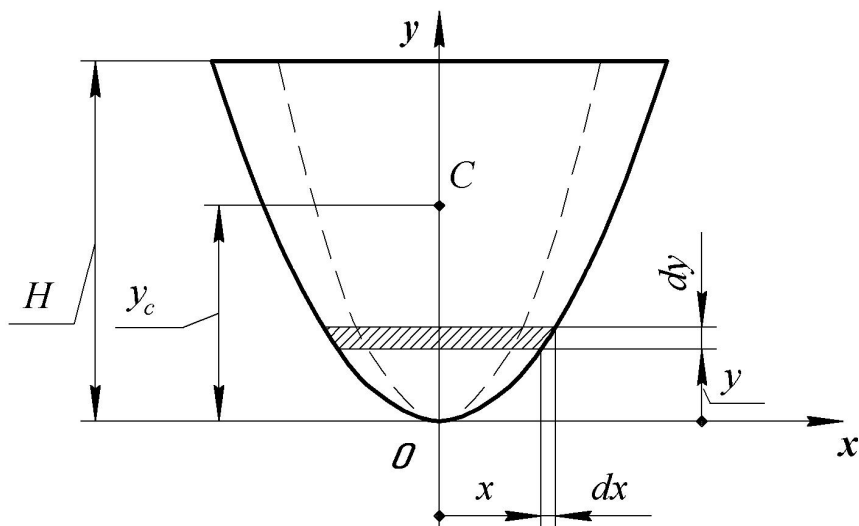


Рисунок 41 – Пример2. Способ интегрирования

Координату y_c центра тяжести пластины найдём по формуле (42). Площадь элементарной полоски, когда она стремится к нулю, обозначим ds вместо s_i , пределы сумм определим как определенные интегралы по всей площади пластины:

$$y_c = \frac{\int_{(S)} y \cdot ds}{\int_{(S)} ds} \quad (a)$$

Для решения интегралов площадь элементарной полоски выразим через y , учитывая, что $x = \sqrt{2py}$:

$$ds = 2x \cdot dy = 2\sqrt{2py} \cdot dy.$$

Интеграл в знаменателе формулы (a) определяет площадь пластины:

$$S = \int_{(S)} ds = 2\sqrt{2p} \int_0^H \sqrt{y} \cdot dy = \frac{4}{3} \sqrt{2p} \cdot \sqrt{H^3}.$$

Интеграл в числителе равен

$$\int_{(S)} y \cdot ds = 2\sqrt{2p} \cdot \int_0^H y \cdot \sqrt{y} \cdot dy = \frac{4}{5} \sqrt{2p} \sqrt{H^5}.$$

По формуле (a), подставив значения, найдем

$$y_c = \frac{5}{3} H.$$

Результат показывает, что при заданном размере H положение центра тяжести не зависит от параметра p параболы. Для сравнения на рисунке штриховой линией показан контур параболы с иным параметром, чем у параболы, ограничивающей профиль пластины.

Пример 3. На рисунке 42 заданы размеры пластины, центр тяжести C которой лежит на оси её симметрии y . Применяя способ отрицательных сил тяжести, разобьем пластину на три части: 1 – нижний прямоугольник; 2 – верхний прямоугольник с заполненным отверстием (на рисунке прямоугольники разделены штрихпунктирной линией); 3 – отверстие. Центры тяжести частей обозначены C_1 , C_2 , C_3 и также располагаются на оси y . Определим их координаты и площади частей:

$$y_{C1} = 6 \text{ мм}, \quad s_1 = 100 \cdot 12 = 1200 \text{ мм}^2;$$

$$y_{C2} = 12 + 0,5(60 - 12) = 36 \text{ мм}, \quad s_2 = 40 \cdot (60 - 12) = 1920 \text{ мм}^2;$$

$$y_{C3} = 44 \text{ мм}, \quad s_3 = \pi(0,5 \cdot 24)^2 = 452,4 \text{ мм}^2.$$

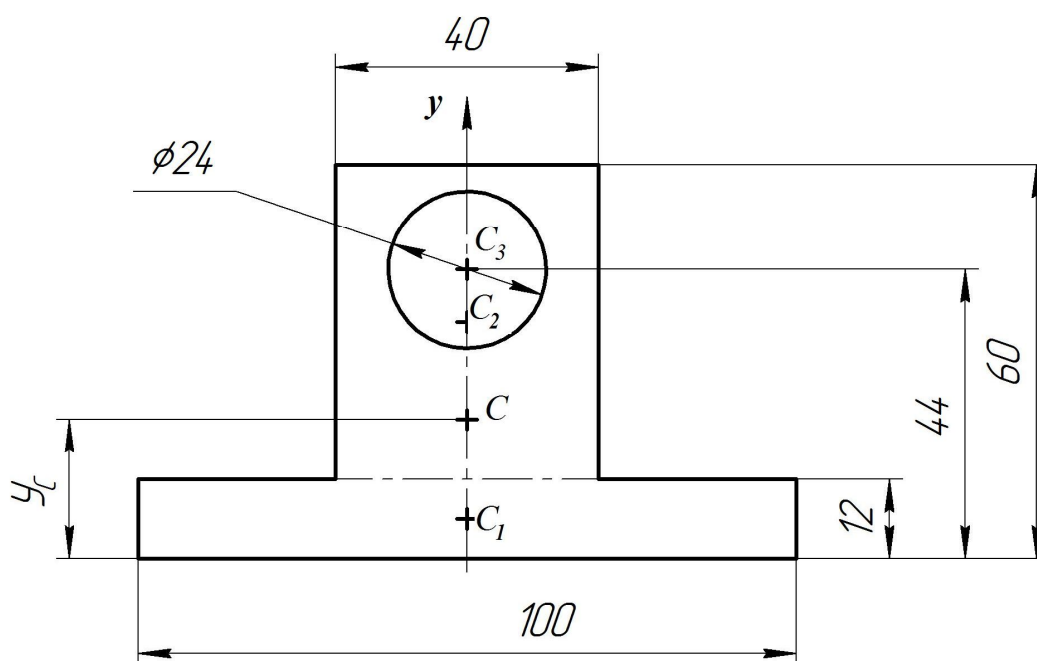


Рисунок 42 – Пример 3. Способ отрицательных сил тяжести

Положение центра тяжести пластины найдем по формуле (42), подставляя значение площади s_3 удаляемой части со знаком минус:

$$y_c = \frac{s_1 \cdot y_{C1} + s_2 \cdot y_{C2} + s_3 \cdot y_{C3}}{s_1 + s_2 + s_3} = \frac{1200 \cdot 6 + 1920 \cdot 36 - 44 \cdot 452,4}{1200 + 1920 - 452,4} = 21,15 \text{ мм}.$$

Формулы для нахождения центров тяжести различных однородных тел можно найти в технических справочниках. Смотрите также учебники [1, 2].

Проекция вектора на ось. Составляющие (компоненты) вектора, параллельные осям координат

На рисунке А.1 показан вектор силы \vec{F} . Проведем оси x и y так, чтобы сила располагалась в плоскости xOy , и чтобы был задан острый угол между линией действия силы и одной из осей (на рисунке это угол γ).

Чтобы построить проекцию, надо из начала и из конца вектора опустить перпендикуляры на ось.

Начало и конец вектора \vec{F} обозначим буквами A и B . Опустим из этих точек перпендикуляры на оси x и y . Длины отрезков $a_x b_x$, $a_y b_y$ между основаниями перпендикуляров определяют модули проекций.

Проекция – это алгебраическая величина, она считается положительной, если направление от начала проекции (точки a_x , a_y) к концу проекции (точки b_x , b_y) совпадает с положительным направлением оси. На рисунке $F_x > 0$, $F_y < 0$.

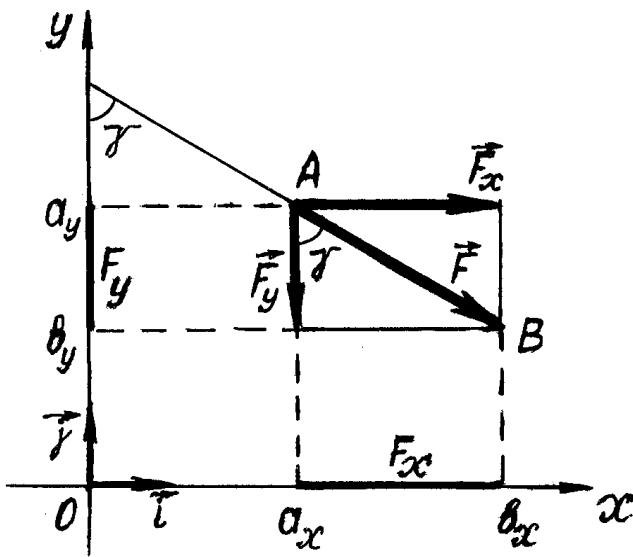


Рисунок А.1

Разложим по закону параллелограмма силу \vec{F} на составляющие \vec{F}_x и \vec{F}_y , параллельные осям координат: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. Из построения видим, что проекция силы на ось равна проекции составляющей, параллельной этой оси. Тогда для определения проекции не обязательно опускать перпендикуляры на ось. Достаточно построить составляющие, параллельные осям. Зная острый угол между диагональю и одной из сторон параллелограмма, находим проекции силы \vec{F} :

$$F_x = +F \sin \gamma, \quad F_y = -F \cos \gamma. \quad \text{Здесь } F - \text{модуль силы } \vec{F}.$$

Пусть, например, модуль силы $F = 240$ Н, угол $\gamma = 60^\circ$. Тогда проекции силы $F_x = 240 \cdot 0,867 = 208,08$ Н, $F_y = -240 \cdot 0,5 = -120$ Н.

Запишем соотношения между составляющими, проекциями и вектором силы

$$\vec{F}_x = F_x \cdot \vec{i}, \quad \vec{F}_y = F_y \cdot \vec{j}, \quad \vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j},$$

где F_x , F_y – алгебраические значения проекций, \vec{i} , \vec{j} – единичные векторы (орты) осей.

На рисунке А.1 векторы составляющих $\vec{F}_x = 120 \cdot \vec{i}$, $\vec{F}_y = -208,08 \cdot \vec{j}$. Знак «минус» показывает, что векторы \vec{F}_y и \vec{j} противоположны. Вектор не имеет знака. Модули составляющих и соответствующих им проекций равны между собой.

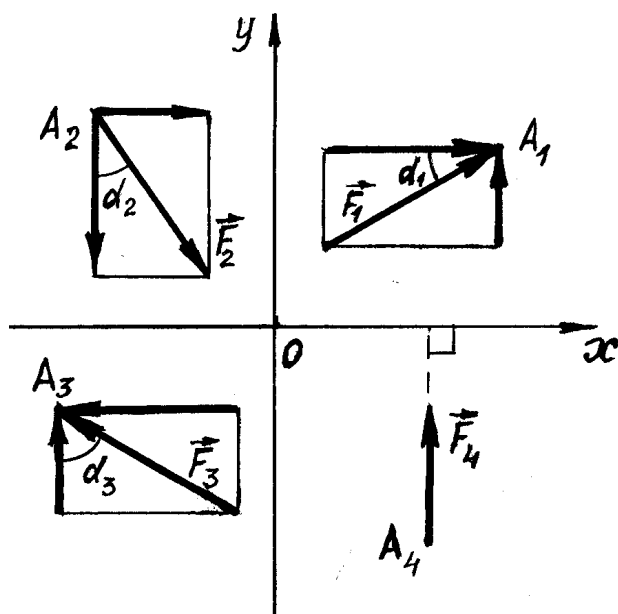


Рисунок А.2

На рисунке А.2 показаны силы \vec{F}_k , приложенные к телу в точках A_k , заданы углы α_k .

Построим параллелограммы, изображим стрелками составляющие, прикладывая их в тех же точках, что и данные силы. Проекция сил:

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= F_1 \cdot \cos \alpha_1, & F_{1y} &= F_1 \cdot \sin \alpha_1; \\
 F_{2x} &= F_2 \cdot \sin \alpha_2, & F_{2y} &= -F_2 \cdot \cos \alpha_2; \\
 F_{3x} &= -F_3 \cdot \sin \alpha_3, & F_{3y} &= F_3 \cdot \cos \alpha_3; \\
 \underline{F_{4x}} &= 0, & F_{4y} &= F.
 \end{aligned}$$

Когда линия действия вектора перпендикулярна оси, то проекция на ось равна нулю.

Если силы образуют произвольную пространственную систему, то при решении задач для некоторых сил необходимо определять три проекции и три составляющие, направленные параллельно осям по ребрам параллелепипеда, в котором вектор силы является диагональю.

Обычно в задачах оси x, y, z выбирают так, чтобы были заданы два угла:

– угол между вектором силы и одной из граней параллелепипеда, параллельной какой-либо координатной плоскости. На рисунке А.3 – это угол α между вектором \vec{F} и гранью $KLMN$;

– угол между диагональю этой грани и одной из её сторон. На рисунке – это угол β между диагональю KM и стороной KL .

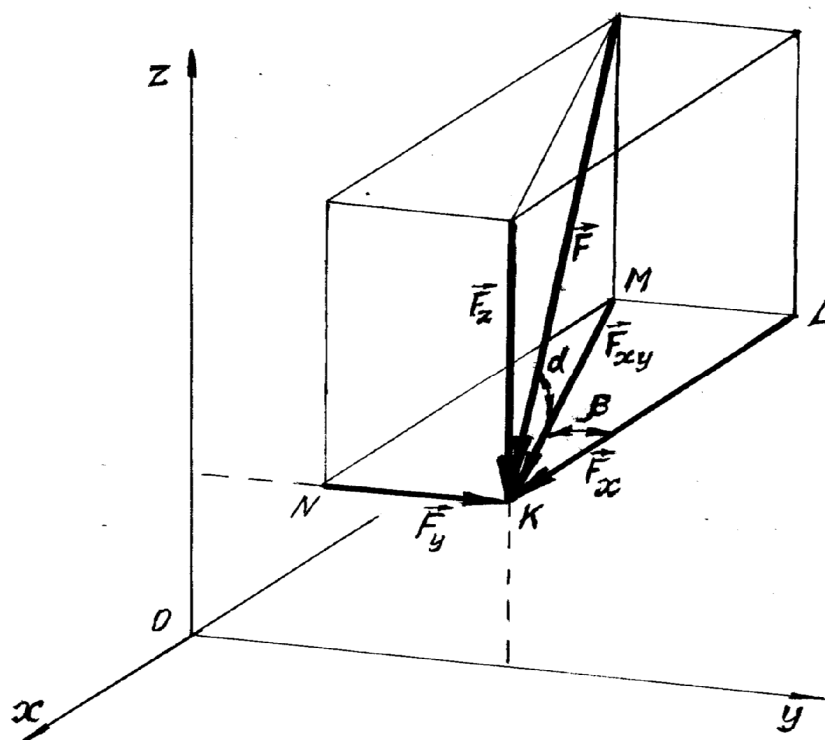


Рисунок А.3

Сила \vec{F} на рисунке А.3 приложена к телу в точке K . Её можно заменить тремя составляющими \vec{F}_x , \vec{F}_y , \vec{F}_z , приложенными в этой же точке. Для доказательства разложим её сначала по аксиоме параллелограмма сил на составляющие \vec{F}_z и \vec{F}_{xy} . Разложим затем \vec{F}_{xy} на её составляющие \vec{F}_x и \vec{F}_y . Из построения, учитывая направления составляющих, находим проекции силы \vec{F} :

$$F_x = +F \cos \alpha \cdot \cos \beta, \quad F_y = +F \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad F_z = -F \sin \alpha.$$

Модули вектора, его составляющих и проекций имеют одинаковую размерность. Векторы могут обладать разнообразными физическими качествами (сила, скорость, ускорение и т. д.), но имеют одинаковые геометрические свойства.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. Определение реакций связей твердого тела

Если тело находится в равновесии, то все действующие на него силы образуют уравновешенную систему. Тогда для этих сил можно составить уравнения равновесия.

Порядок решения

1. Построить расчётную схему:
 - начертить тело, показать действующие на него заданные силы;
 - проставить размеры; обозначить буквами точки соединения тела со связями (другими телами); выбрать направления координатных осей x и y ;
 - приложить к телу реакции мысленно отброшенных связей.
2. Выбрать точку (*) для определения моментов сил. Точка (*) на схеме обозначается буквой.
3. Записать уравнения равновесия:
 - суммы проекций сил (включая реакции связей) на оси x и y равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0;$$
 - сумма моментов всех сил относительно выбранной точки (*) равна нулю:

$$\sum M_*(\vec{F}_k) = 0.$$
4. Решить уравнения, определить неизвестные величины.

Если конструкция составлена из нескольких тел, то строят расчетные схемы для каждого тела в отдельности, учитывая, что внутренние реакции – силы взаимодействия двух тел конструкции – равны по модулю и противоположны по направлению. По каждой схеме составляют уравнения равновесия. В системе всех этих уравнений алгебраические значения внутренних реакций в соединении двух тел равны, т.е. имеют равные модули и одинаковые знаки.

Пример

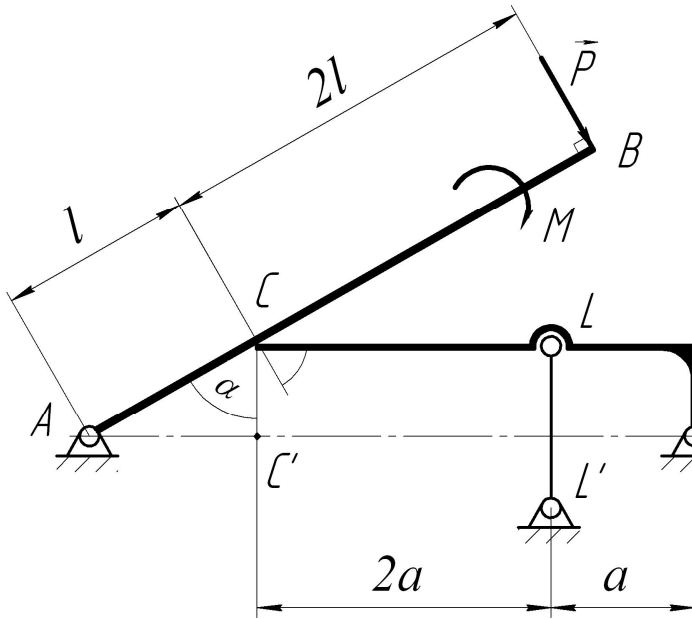
Тело CKD , рисунок Б.1, присоединено к основанию с помощью шарнира D и удерживается от поворота вокруг оси D стержнем LL' . Соединения в точках L и L' также являются шарнирами.

Рычаг AB может вращаться вокруг оси шарнира A , но под действием силы $P = 120 \text{ Н}$ и момента пары сил $M = 4 \text{ Нм}$ прижат к телу CKD в точке C .

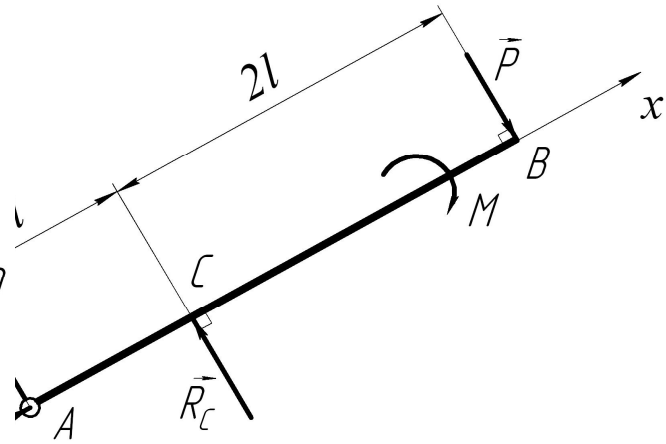
Заданы размеры:

$$l = a = 0,2 \text{ м}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

Рисунок Б.1 – Схема устройства



Силами тяжести, размерами поперечных сечений тел и трением пренебречь. Определить реакции всех связей



Построим схему для рычага AB . Приложим к нему заданную нагрузку: силу \vec{P} и момент M , рисунок Б.2. Ось x проведём вдоль AB , ось y – перпендикулярно AB . Тогда для составления уравнений равновесия достаточно знать только два заданных размера:

$$AC = l, \quad CB = 2l,$$

так как реакция \vec{R}_C , приложенная в точке C со стороны тела CKD перпендикулярна AB .

Реакцию шарнира в точке A представим составляющими

\vec{X}_A, \vec{Y}_A , направленными параллельно осям x и y . Моменты сил запишем относительно точки A , тогда в уравнении моментов будут отсутствовать сразу две неизвестные: X_A и Y_A .

Рисунок Б.2 – Расчетная схема рычага AB

Рисунок Б.2 – Расчетная схема тела AB

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_C - P = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad R_C \cdot l - M - P \cdot (3l) = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим тело CKD .

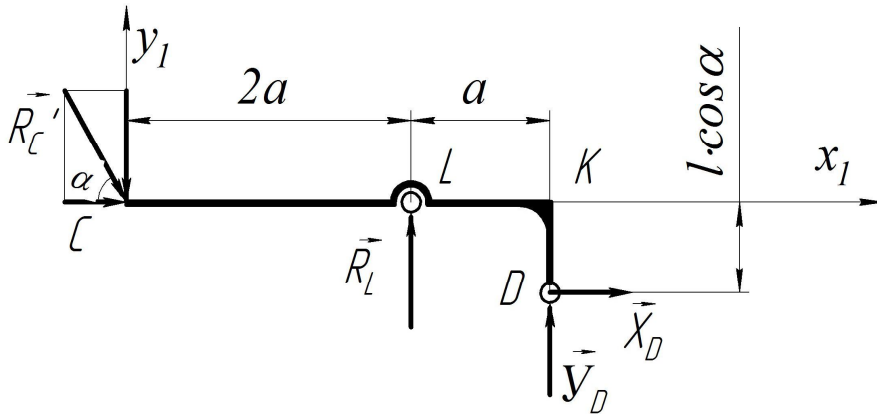


Рисунок Б.3 – Расчетная схема тела CKD

На тело действуют только реакции связей, рисунок Б.3. Учитывая, что размеры заданы по горизонтали, а реакция \vec{R}_L невесомого стержня LL' вертикальна, ось x_1 удобно провести вправо, ось y_1 направить вверх. В соответствии с аксиомой равенства действия и противодействия

реакция рычага $\vec{R}'_C = -\vec{R}_C$, следовательно, направлена под углом α к оси x_1 . Реакцию шарнира D раскладываем на составляющие \vec{X}_D , \vec{Y}_D .

Уравнение моментов составим относительно точки D . Чтобы не определять плечо силы \vec{R}'_C , разложим её по аксиоме параллелограмма сил на составляющие: $\vec{R}'_C \cdot \cos \alpha$ (направлена вдоль x_1) и $\vec{R}'_C \cdot \sin \alpha$ (противоположна y_1), а затем применим теорему Вариньона. Длину участка KD , равную плечу силы ($\vec{R}'_C \cdot \cos \alpha$), найдём из треугольника ACC' на схеме Б.1: $KD = CC' = l \cdot \cos \alpha$.

Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R'_C \cdot \cos \alpha + X_D = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -R'_C \cdot \sin \alpha + R_L + Y_D = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_D(\vec{F}_k) = 0, \quad (R'_C \cdot \sin \alpha) \cdot 3a - (R'_C \cdot \cos \alpha) \cdot (l \cos \alpha) - R_L \cdot a = 0. \quad (6)$$

Примечание. При составлении уравнений было учтено, что векторы \vec{R}_C и \vec{R}'_C противоположны. В уравнениях (2)...(6) величины R_C и R'_C представляют собой одинаковые алгебраические числа, т.е. $R_C = R'_C$. Заметим также, что положение начала координат не имеет значения. Направление осей x, y выбирают так, чтобы удобно было находить проекции сил.

Решение уравнений

Из уравнений (3) и (2) последовательно находим

$$R_C = \frac{M}{l} + P \cdot 3 = \frac{4}{0,2} + 120 \cdot 3 = 380 \text{ Н,}$$

$$Y_A = P - R_C = 120 - 380 = -260 \text{ Н.}$$

Знак минус в ответе для Y_A показывает, что вектор \vec{Y}_A противоположен направлению, показанному на схеме Б.2. Так как из уравнения (1) $X_A = 0$, то полная реакция \vec{R}_A равна \vec{Y}_A .

Учтём далее, что алгебраические значения R'_C и R_C равны.

Из уравнений (4), (6), (5) получим

$$X_D = -R'_C \cdot \cos 60^\circ = -380 \cdot 0,5 = -190 \text{ Н},$$

$$R_L = (R'_C \cdot \sin \alpha) \cdot 3 - (R'_C \cdot \cos \alpha) \cdot (l \cos \alpha) \cdot \frac{1}{a} =$$

$$= 380 \cdot 0,867 \cdot 3 - 380 \cdot 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{0,2} = 893,4 \text{ Н},$$

$$Y_D = R'_C \cdot \sin \alpha - R_L = 380 \cdot 0,867 - 893,4 = -563,9 \text{ Н}.$$

Знаки минус в ответах показывают, что направления составляющих \vec{X}_D и \vec{Y}_D противоположны указанным на схеме Б.3. Модуль полной реакции $R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{190^2 + 563,9^2} = 595 \text{ Н}.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С.М. Тарг. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
2. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 9-е изд. стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2002. – 768 с.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Учебное пособие для студентов,
обучающихся по направлениям «Агроинженерия»
и «Теплоэнергетика и теплотехника»

Составители:

Боровиков Юрий Алексеевич
Гусева Наталья Викторовна
Иванов Алексей Генрихович
Костин Александр Владимирович

Технический редактор Е.Ф. Николаева

Подписано в печать «28» июня 2016 г.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 3,26. Уч.-изд. л. 2,15.
Тираж 50 экз. Заказ № 6808.
ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА
426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, 11